

dfadd478b96da38f4770fc03fd2ef012ad33f139

«Томский государственный педагогический университет»
(ТГПУ)

M.P.



заведующий кафедрой
математики, теории и
методики обучения
математике, доцент, к.п.н.

Томск 2025 г.

Содержание

1. Паспорт программы
2. Актуальность программы
3. Цели и задачи
4. Ожидаемые результаты освоения программы/ модуля
5. Учебный план
6. Учебно-тематический план
7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса
10. Формы учебной работы
11. Формы контроля
- 11.1. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

1. Паспорт программы

Аннотация программы	Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к ОГЭ по математике» направлена на подготовку обучающихся к Государственной итоговой аттестации в новой форме обязательного государственного экзамена (далее – ОГЭ) в 9 классе, а также на повышение уровня их математической подготовки, развитие у обучающихся творческих способностей при решении конкурсных задач более сложного уровня. Программа состоит из 7 модулей. Обучающийся вправе освоить как все модули, так и один или несколько модулей в соответствии со своими образовательными потребностями.
Направленность дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Естественно-научная
Вид деятельности дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Математика
Категория обучающихся	9 класс (15-16 лет)
Срок обучения	60 часов ¹
Форма обучения	очная
Режим занятий	2 ак. часа в неделю
Ожидаемое минимальное и максимальное число обучающихся в одной группе	7-15
Категория состояния здоровья обучающихся, которые могут быть зачислены на обучение по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе	Без детей ОВЗ

2. Актуальность программы

Актуальность программы «Подготовка к ОГЭ по математике» обусловлена его практической значимостью. Обучающиеся могут применить полученные знания и практический опыт при сдаче ОГЭ, а в дальнейшем ЕГЭ. Данный курс так же поможет научить школьника технике работы с тестовыми заданиями и сдаче ОГЭ.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний по различным разделам, полученных учащимися за весь период обучения с 5 по 9 класс. Программа позволит систематизировать и углубить знания учащихся по различным разделам курса математики основной школы (арифметике, алгебре, статистике и теории вероятностей, геометрии).

¹ Обучающийся, родитель (законный представитель) несовершеннолетнего обучающегося при заполнении заявления о зачислении и заключении договора об оказании платных образовательных услуг вправе выбрать из общего количества часов по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе «Подготовка к ОГЭ по математике» любое количество часов, но не более общего количества часов по ДООП в целом.

В данном курсе также рассматриваются нестандартные задания, выходящие за рамки школьной программы (графики с модулем, кусочно-заданные функции, решение нестандартных уравнений и неравенств и др.). Знание этого материала и умение его применять в практической деятельности позволит школьникам решать разнообразные задачи различной сложности и подготовиться к успешной сдаче экзамена в новой форме итоговой аттестации.

3. Цели и задачи

Организационно-педагогической целью образовательной программы «Подготовка к ОГЭ по математике» является создание условий, позволяющих подготовить учащихся к успешной сдаче итогового экзамена по математике за курс основного общего образования.

Дидактическая цель программы – содействовать развитию познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей обучающихся в процессе решения математических задач, расширение математического кругозора, совершенствование условий решать математические задачи.

Задачи:

- повторить и систематизировать знания обучающихся в области математики;
- закрепить алгоритмы решения математических задач;
- совершенствовать умения применять основные методы решения задач;
- изучить новые методы решения задач повышенной сложности;
- способствовать развитию интереса школьников к предмету математика.

4. Ожидаемые результаты освоения программы

- расширение знаний об основных алгоритмах решения задач, различных методах и приемах решения задач;
- развитие познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей на основе опыта самостоятельного решения задач разного вида, анализа и оценки новой информации;
- сознательное самоопределение ученика относительно профиля дальнейшего обучения или профессиональной деятельности;
- успешность написания ОГЭ по математике.

Обучающиеся, освоившие программу, должны знать:

- основные математические формулы, используемые в алгебраических задачах;
- основные формулы и теоремы планиметрии;
- сущность алгоритмического подхода в решении задач.

Обучающиеся, освоившие программу, должны уметь:

- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени и радикалы;
- решать рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, а также системы уравнений и неравенств;
- создавать математические модели;
- решать задачи с практическим содержанием;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических и алгебраических величин, применяя изученные математические формулы, уравнения и неравенства;
- решать планиметрические задачи;
- решать задания, по типу приближенному к заданиям ОГЭ.

Обучающиеся, освоившие программу, должны владеть навыками:

- самостоятельной математической и творческой деятельности по решению задач ОГЭ по математике;
- работы с информацией;
- группового взаимодействия;

- разработки и реализации математического исследования.

5. Учебный план

№ п/п	Наименование модулей и разделов	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Делимость чисел	4	1	3	Зачет
2.	Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости	4	1	3	Зачет
3.	Модуль 3. Числовые функции и последовательности	8	2	6	Зачет
4.	Модуль 4. Многочлены	6	2	4	Зачет
5.	Модуль 5. Уравнения и неравенства	10	3	7	Зачет
6.	Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства	12	3	9	Зачет
7.	Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	16	4	12	Зачет
ИТОГО:		60	16	44	

6. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Делимость чисел	4	1	3	
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель	2	1	1	
1.2.	Числовые выражения	1		1	
1.3.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
2.	Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости	4	1	3	
2.1.	Координаты и графики	2	1	1	
2.2.	Операции над векторами	1		1	
2.3.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
3.	Модуль 3. Числовые функции и последовательности	8	2	6	
3.1.	Свойства функции	4	1	3	
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	3	1	2	
3.3.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
4.	Модуль 4. Многочлены	6	2	4	
4.1.	Разложение многочлена на	2	1	1	

	множители				
4.2.	Преобразование выражений	3	1	2	
4.3.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
5.	Модуль 5. Уравнения и неравенства	10	3	7	
5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	3	1	2	
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	3	1	2	
5.3.	Системы уравнений и неравенств	3	1	2	
5.4.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
6.	Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства	12	3	9	
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	3	1	2	
6.2.	Площади фигур	4	1	3	
6.3.	Задачи на построение	4	1	3	
6.4.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
7.	Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	16	4	12	
7.1.	Текстовые задачи	6	2	4	
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	5	2	3	
7.3.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
	ИТОГО:	60	16	44	

7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Содержание обучения
Модуль 1. Делимость чисел		
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное	Теория: Десятичная система счисления. Делимость натуральных чисел. Практика: Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Нахождение наибольшего общего делителя (далее – НОД) и наименьшего общего кратного (далее – НОК). Деление с остатком.
1.2.	Числовые выражения	Теория: Модуль (абсолютная величина) числа. Практика: Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий. Понятие об иррациональном числе.

		Сравнение действительных чисел. Проценты. Пропорции. Округление чисел.
Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости		
2.1.	Координаты и графики	Теория: Геометрический смысл модуля. Практика: Решение задач геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления. Прочтение графиков и диаграмм. Составление уравнений прямых и парабол по заданным условиям. Построение графиков с двумя переменными.
2.2.	Операции над векторами	Теория: Вектор, длина (модуль) вектора. Практика: операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.
Модуль 3. Числовые функции и последовательности		
3.1.	Свойства функции	Теория: Построение графиков изученных функций, их исследование. Практика: Построение более сложных графиков функций (кусочно-заданных, с «выколотыми» точками и т.п.).
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	Теория: Понятие числовых последовательностей. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Практика: Решение задач с применением формул n -го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сложные проценты.
Модуль 4. Многочлены		
4.1.	Разложение многочлена на множители	Теория: Понятие многочлена. Практика: Сложение, вычитание, умножение многочленов. Разложение многочленов на множители с использованием нескольких способов.
4.2.	Преобразование выражений	Теория: Способы преобразования выражений. Практика: Многошаговые преобразования целых и дробных выражений (применяя широкий набор изученных алгоритмов). Действия с алгебраическими дробями. Рациональные выражения и их преобразования.
Модуль 5. Уравнения и неравенства		
5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	Теория: Виды уравнений. Практика: Решение систем линейных уравнений и систем, содержащих нелинейные уравнения, способами подстановки и сложения. Решение линейных неравенств с одной переменной и их систем, требующих алгебраических преобразований. Решение квадратных неравенств и систем, включающих квадратные неравенства.
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	Теория: Приемы и техники решения уравнений и неравенств с параметром.

		Практика: Решение задач, связанных с исследованием неравенств и систем, содержащих буквенные коэффициенты.
5.3.	Системы уравнений и неравенств	Теория: Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными. Практика: Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим сложением. Решение простейших нелинейных систем.
Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства		
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	Теория: Основные понятия, символика. Практика: Способы оформления решения геометрических задач.
6.2.	Площади фигур	Теория: Формулы вычисления площадей фигур. Практика: Решение задач.
6.3.	Задачи на построение	Теория: Задачи на построение Практика: Решение задач на построение.
Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей		
7.1.	Текстовые задачи	Теория: Текстовые задачи Практика: Решение задач арифметическими способами рассуждений, алгебраическим методом (составление выражений, уравнений, систем).
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	Теория: Знакомство со спецификой комбинаторных и вероятностных задач. Практика: Решение задач.

8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

Для обеспечения программы необходимы: аудиторный фонд, мультимедийный комплекс, USB-модем, флеш-карта, видеоматериал, наглядные пособия, дидактический материал.

9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса

Основные формы организации обучения: проведение лекций (проблемных и традиционных); практических занятий (коллективные формы обсуждения, круглые столы, мозговые штурмы, работа в микрогруппах – решение проблемных ситуаций, моделирование, защита решений), различные формы самостоятельной работы, промежуточные аттестации обучающихся, консультации и т.д.

Самостоятельная работа обучающихся предполагает различные формы индивидуальной учебной деятельности: конспектирование научной и учебно-методической литературы, сбор и анализ практического материала, ведение словаря, проектирование, выполнение тематических исследовательских заданий и пр. Выбор форм и видов самостоятельной работы определяются индивидуально-личностным и компетентностным подходом к обучению совместно преподавателем и обучающимися.

10. Формы учебной работы

Фронтальная, индивидуальная и групповая работа.

11. Формы контроля

11.1. Формы текущего контроля успеваемости промежуточной аттестации

Текущий контроль успеваемости осуществляется на занятиях на основе наблюдений за деятельностью учащихся в ходе занятий.

Промежуточной аттестацией по итогам освоения каждого модуля является зачет в форме тестирования, где учащимся предлагается ответить на вопросы теста, проверочной работы (решение тренировочных заданий ОГЭ по модулям 1-7).

№ п/п	Наименование модулей	Вид контроля
1	Делимость чисел	Тестирование
2	Декартовы координаты. Векторы на плоскости	Проверочная работа
3	Числовые функции и последовательности	Проверочная работа
4	Многочлены	Проверочная работа
5	Уравнения и неравенства	Проверочная работа
6	Геометрические фигуры и их свойства	Проверочная работа
7	Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	Проверочная работа

Примерные вопросы по модулям и Критерии оценивания

Вопросы и задания по модулю 1: «Делимость чисел»:

Вопрос 1. Какие числа делятся на 3?

- А) Все числа, оканчивающиеся цифрой 3;
- Б) Все числа, сумма цифр которого делится на 3;
- В) Все числа, оканчивающиеся на 3, 6 или 9;
- Г) Все числа, оканчивающиеся нечетной цифрой.

Вопрос 2. Выберите ряд, в котором все числа делятся на 5:

- А) 25360, 215, 9845, 67351;
- Б) 34795, 54540, 12345, 214;
- В) 1295, 360, 84965, 2225;
- Г) 3451, 39798, 948, 680.

Вопрос 3. Какие цифры можно подставить в число *8658 вместо*, чтобы полученное число делилось на 9?

- А) 0 и 9;
- Б) 0;
- В) 9;
- Г) нет верного ответа.

Вопрос 4. Какое число является НОК чисел 8, 12 и 6?

- А) 24;
- Б) 576;
- В) 48;
- Г) 2.

Вопрос 5. Какие числа являются взаимно простыми?

- А) 5 и 25;
- Б) 9 и 99;
- В) 81 и 13;
- Г) 12 и 16.

Критерии оценивания:

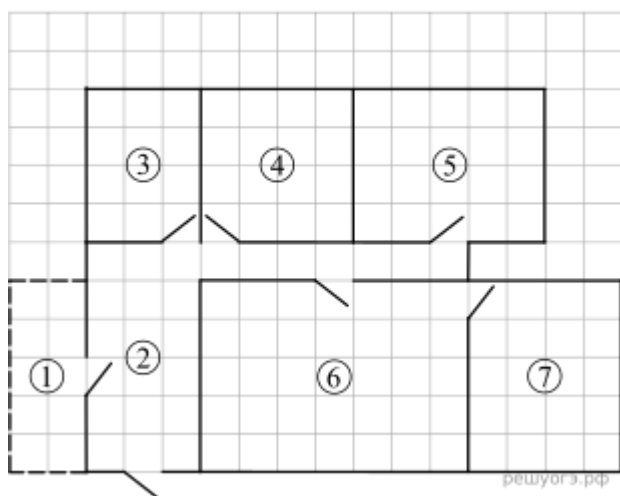
85 - 100 % правильных ответов – высокий уровень;

менее 50 % правильных ответов – низкий уровень.

Оценка «не зачтено» ставится по итогам тестирования, если обучающийся не достиг среднего уровня (правильных ответов менее 50 %).

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на схеме. Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырех цифр.

Цифры



При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Напротив входа в квартиру располагается совмещенный санузел, а справа от него — детская комната.

Пол в гостиной планируется покрыть паркетной доской длиной 1 м и шириной 0,25 м.

Решение. При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Значит, балкон отмечен цифрой 1. Напротив входа в квартиру располагается совмещенный санузел, а справа от него – детская комната, следовательно, детская комната отмечена на схеме цифрой 4. Гостиная занимает наибольшую площадь в квартире, из гостиной можно попасть в кабинет, поэтому кабинет отмечен цифрой 7. В конце коридора находится кухня площадью 20 м², значит, кухня отмечена цифрой 5.

2. Паркетная доска продается в упаковках по 8 шт. Сколько упаковок с паркетной доской требуется купить, чтобы покрыть пол в гостиной?

Решение. Заметим, что чтобы покрыть паркетной доской 1 м^2 пола, требуется 4 доски. Найдем площадь гостиной:

$$7 \cdot 5 = 35 \text{ м}^2.$$

Значит, требуется $35 \cdot 4 = 140$ досок. Следовательно, требуется $\frac{140}{8} = 17,5$ упаковок с паркетной доской. Таким образом, необходимо купить 18 упаковок.

Ответ: 18

3. Найдите площадь коридора (коридором считается площадь квартиры, не занятая комнатами или балконом). Ответ дайте в квадратных метрах.

Решение. Сторона одной клетки равна 1 м. Значит, площадь коридора равна:

$$3 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 25 \text{ м}^2.$$

Ответ: 25

4. Найдите расстояние d между противоположными углами детской комнаты в метрах. В ответ запишите $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Решение. Найдем расстояние d между противоположными углами детской комнаты по теореме Пифагора:

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$$

Таким образом, получаем ответ:

Ответ: 4

5. Хозяин квартиры планирует установить в квартире плиту для готовки. Он рассматривает два варианта: газовая плита или электроплитка. Цены на плиты, данные о потреблении и тарифах оплаты даны в таблице.

	Цена	Сред. расход газа / сред. потребл. мощность	Стоимость газа /электро-энергии
Газовая плита	44 680 руб.	1,4 куб. м/ч	6 руб./куб. м
Электроплитка	21 000 руб.	5,8 кВт	4 руб./(кВт · ч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовую плиту. Через сколько часов непрерывного использования экономия от использования газовой плиты вместо электрической компенсирует разность в стоимости установки газовой плиты и электроплитки?

Решение. Разница в стоимости покупки газовой плиты и электроплитки равна $44\,680 - 21\,000 = 23\,680$ руб. Час использования газовой плиты стоит $1,4 \cdot 6 = 8,4$ руб. Час использования электроплитки стоит $5,8 \cdot 4 = 23,2$ руб. Разница в стоимости составляет $23,2 - 8,4 = 14,8$ руб. Значит, экономия от использования газовой плиты вместо электроплитки компенсирует разность в стоимости установки газовой и электрической плит через $\frac{23680}{14,8} = 1600$ часов.

Ответ: 1600

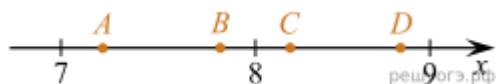
6. Найдите значение выражения $\frac{5}{6} - \frac{3}{14}$. Представьте результат в виде несократимой обыкновенной дроби. В ответ запишите числитель этой дроби.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{14} = \frac{5 \cdot 7 - 3 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{26}{14 \cdot 3} = \frac{13}{21}.$$

Ответ: 13

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$.



Какая это точка?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) точка A
- 2) точка B
- 3) точка C
- 4) точка D

Решение. Возведем в квадрат числа $\sqrt{77}$, 7, 8, 9:

$$\sqrt{77}^2 = 77, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81.$$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке D.

Правильный ответ указан под номером 4.

Ответ: 4

8. Найдите значение выражения $5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22}$.

Решение. Упростим выражение, разложив подкоренные выражения на множители и вынесем за знак корня полные квадраты чисел:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22} &= 5 \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 11} = \\ &= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 220. \end{aligned}$$

Ответ: 220

9. Решите уравнение $3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4$.

Решение. Последовательно получаем:

$$3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4 \Leftrightarrow 3x + x + x = 1 + 4 - 5 - 5 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1

10. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5?

Решение. Чисел от 15 до 29 — 15 штук. Среди них на 5 делится только 3 числа. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5 равна

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Примечание.

Фраза от « M до N » подразумевает, что и M , и N включаются в диапазон. Количество чисел в указанном диапазоне можно найти по формуле $N - M + 1$. Фраза «число делится на k » подразумевает, что число делится на k без остатка. Такие соглашения используются в сборниках для подготовки к экзаменам во всех задачах подобного типа.

Ответ: 0,2

11. Установите соответствие между функциями и их графиками.

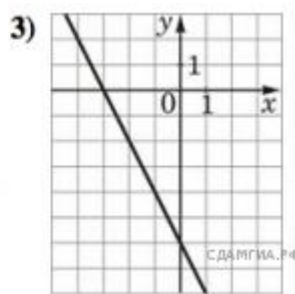
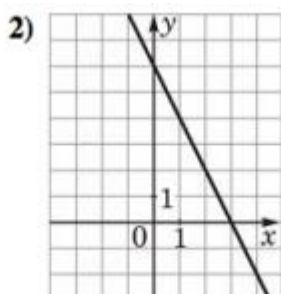
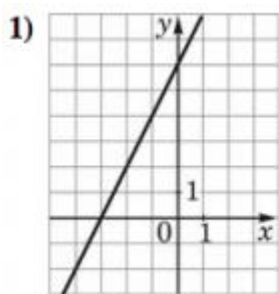
ФУНКЦИИ

А) $y = 2x + 6$

Б) $y = -2x - 6$

В) $y = -2x + 6$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А Б В

Решение. Напомним, что если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то: при $k > 0$, тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс положителен.

Уравнение $y = 2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 1).

Уравнение $y = -2x - 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке -6. Ее график изображен на рисунке 3).

Уравнение $y = -2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 2).

Тем самым, искомое соответствие: А — 1, Б — 3, В — 2.

Ответ: 132

12. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец.

Решение. Подставим в формулу значение переменной n :

$$C = 6000 + 4100 \cdot 5 = 26500.$$

Ответ: 26500

13. Решите неравенство: $\frac{x-2}{3-x} \geq 0$

На каком из рисунков изображено множество его решений?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1)



2)



3)

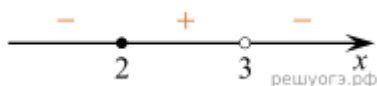


4)



Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x-2}{3-x} \geq 0.$$



Получаем $x \in [2; 3)$.

Правильный ответ указан под номером 3.

Ответ: 3

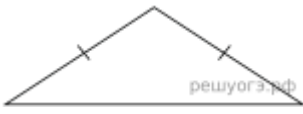
14. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение. Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй — $a_2, \dots$, в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8

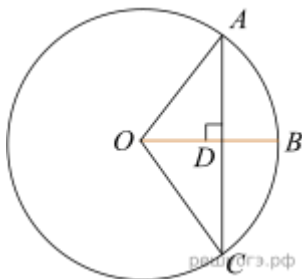
15.  Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120° . Найдите длину боковой стороны.

Решение. Пусть длина боковой стороны равна a . Площадь треугольника можно найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 120^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin 120^\circ}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 196\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Ответ: 28



16. Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC , если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

Решение. Найдем отрезок DO : $DO = OB - BD = 5 - 1 = 4$. Так как OB перпендикулярен AC , треугольник AOD — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Треугольник AOC — равнобедренный так как $AO = OC = r$, тогда $AD = DC$. Таким образом, $AC = AD \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6

17. Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π , угол сектора равен 120° , а радиус круга равен 9. В ответе укажите площадь, деленную на π .

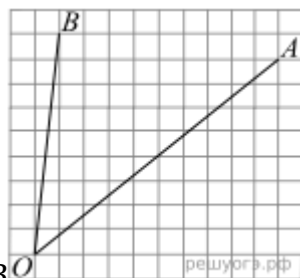
$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha,$$

Решение. Площадь сектора равна имеем:

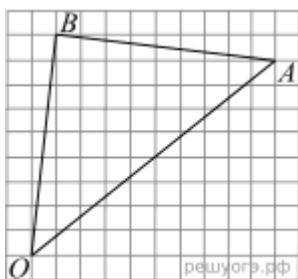
$$S = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

Ответ: 27

18.



Найдите тангенс $\angle AOB$



Решение. Найдем каждую из сторон треугольника AOB , чтобы показать, что он прямоугольный.

$$OB = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

$$OA = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}$$

Таким образом, $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{OB} = 1$$

Ответ: 1

19. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.
- 3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.

- 1) «Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны» — *неверно*: такого признака равенства треугольников нет.
- 2) «Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям» — *верно*, по теореме о средней линии трапеции она параллельна основаниям и равна их полусумме.
- 3) «Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов» — *верно*, для того, чтобы существовал треугольник, сумма любых его двух сторон должна быть больше третьей стороны.

Ответ: 23

20. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$.

Решение. Найдём значение выражения:

$$\frac{p(a)}{p(6-a)} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{6-a-3}{(6-a)(6-(6-a))} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{-a+3}{(6-a)a} = -1.$$

Ответ: -1.

21. Из пунктов A и B , расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от A . Найдите скорость пешехода, шедшего из A , если известно, что он шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из B , и сделал в пути получасовую остановку.

Решение. Пусть скорость пешехода, шедшего из пункта A , равна x км/ч, $x > 1$. Тогда скорость пешехода, шедшего из пункта B , равна $(x-1)$ км/ч.

Составим таблицу по данным задачи:

Скорость, км/ч Время, ч Расстояние, км

Пешеход, шедший из A	x	$\frac{9}{x}$	9
------------------------	-----	---------------	---

Пешеход, шедший из B	$x - 1$	$\frac{10}{x - 1}$	10
------------------------	---------	--------------------	----

Так как пешеход, шедший из A , сделал по пути остановку на $\frac{1}{2}$ ч., а вышли пешеходы одновременно, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-1} - \frac{9}{x} = \frac{1}{2} \quad x > 1 \Leftrightarrow 20x - 18(x-1) = x(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 6 \end{cases} \quad x > 1 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6 км/ч.

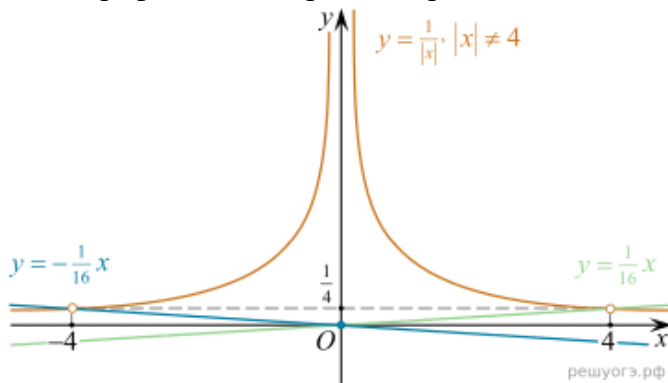
22. Постройте график функции $y = \frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение. Преобразуем выражение: $\frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|} = \frac{|x| - 4}{|x|(|x| - 4)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 4$.

$$y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена} & \text{при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$$

Значит,

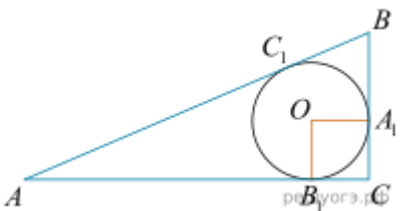
Построим ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и удалим точку $\left(4; \frac{1}{4}\right)$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4; \frac{1}{4}\right)$. Этим случаям соответствуют значения $k = 0, k = -\frac{1}{16}, k = \frac{1}{16}$.

Ответ: $0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$.

23. В треугольнике ABC угол C равен 90° , радиус вписанной окружности равен 3. Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 15$.



Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим r . Тогда $AC_1 = AB_1, BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника ABC равен $2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r$. Полупериметр p равен $AB + r$.

По формуле площади треугольника находим

$$S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = (15 + 3) \cdot 3 = 54.$$

Ответ: 54.

Другое решение.

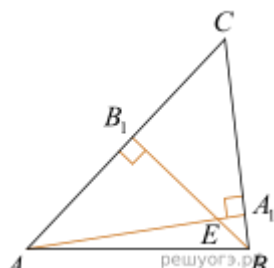
Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Пусть $AC_1 = AB_1 = x, BC_1 = BA_1 = y$. Тогда $AC = x + r, BC = y + r, AB = x + y$. Учитывая, что $r = 3$ и $x + y = 15$, по теореме Пифагора получим

$$(x + 3)^2 + (15 - x + 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 6. \end{cases}$$

Следовательно, один из катетов треугольника равен $9 + 3 = 12$, второй катет равен $6 + 3 = 9$, и площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54.$$

24. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



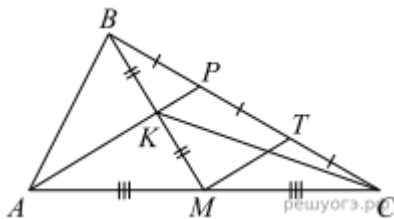
Решение. Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1 — они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$.

Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB , углы AEB и B_1EA_1 равны как вертикальные, из предыдущей пропорции $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

Примечание.

Увидеть угол AA_1B_1 будет легче, если соединить точки A_1 и B_1 .

25. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$.



Решение. Проведем отрезок MT , параллельный AP . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна $2S$, значит, площадь треугольника CKB равна $3S$ и равна площади треугольника CMK (треугольники имеют одну высоту, проведенную из вершины C , и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника AMK . Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK . Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$.

Ответ: 0,6.

Критерии оценивания проверочных работ (по модулям 2-7):

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 2.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение
1	Задача решена частично
0	Решение неверное или отсутствует

За каждую работу можно получить до 50 баллов.

Баллы	Оценка
25–50	Зачтено
24 и менее	Не зачтено