

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Садиева Марина Станиславовна

Должность: Проректор по образовательной деятельности

Дата подписания: 07.08.2025 16:01:54

Уникальный программный ключ:

dfadd478b96da38f4770fc03fd2ef012ad959199

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный педагогический университет»
(ТГПУ)

УТВЕРЖДАЮ

Директор Центра ДФМиЕНО

Червонный М.А.

4.08.2025

(дата)

М.П.



Центр дополнительного физико-математического и естественнонаучного образования

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа
«Подготовка к олимпиадам по математике»

Автор программы

Подстригич А. Г.,

заведующий кафедрой

математики, теории и

методики обучения

математике, доцент, к.п.н.

Томск 2025 г.

Содержание

1. Паспорт программы
2. Актуальность программы
3. Цели и задачи
4. Ожидаемые результаты освоения программы/ модуля
5. Учебный план
6. Учебно-тематический план
7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса
10. Формы учебной работы
11. Формы контроля
- 11.1. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

1. Паспорт программы

Аннотация программы	Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к олимпиадам по математике» направлена на совершенствование навыков решения задач повышенного и высокого уровней сложности, достаточных для успешного участия в олимпиадах по математике. В процессе обучения по программе «Подготовка к олимпиадам по математике» обучающиеся изучат различные виды олимпиадных заданий (тестовые, творческие, вопросы, требующие письменного ответа, и др.), научатся нестандартно подходить к решению олимпиадных задач. Программа «Подготовка к олимпиадам по математике» состоит из трех разделов: «Логические задачи», «Специальные инструменты олимпиадной математики», «Геометрические задачи». Разделы выстроены в единой логике, обеспечивая переход от знания к навыку и от простого к сложному. Обучающийся вправе освоить как все модули, так и один или несколько модулей в соответствии со своими образовательными потребностями.
Направленность дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Естественно-научная
Вид деятельности дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Математика
Категория обучающихся	16–18 лет (обучающиеся 9–11 классов)
Срок обучения	60 часов ¹
Форма обучения	очная
Режим занятий	2 ч в неделю
Ожидаемое минимальное и максимальное число обучающихся в одной группе	7–20
Категория состояния здоровья обучающихся, которые могут быть зачислены на обучение по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе	Без детей с ОВЗ

2. Актуальность программы

Актуальность программы обусловлена необходимостью развития способностей обучающихся, имеющих высокую мотивацию к изучению математики, и их подготовки к результативному участию в олимпиадах различного уровня.

¹ Обучающийся, родитель (законный представитель) несовершеннолетнего обучающегося при заполнении заявления о зачислении и заключении договора об оказании платных образовательных услуг вправе выбрать из общего количества часов по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе «Подготовка к олимпиадам по математике» любое количество часов, но не более общего количества часов по ДООП в целом.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к олимпиадам по математике» направлена на повышение уровня математической культуры обучающихся, формирование необходимой основы для успешного выступления на математических олимпиадах различных уровней.

Олимпиадное движение – очень важное направление в обучении детей, где помимо углубленного изучения материала ребенок получает важный опыт работы по участию в олимпиадах. Благодаря такому опыту школьник в дальнейшем более уверенно чувствует себя на других испытаниях и может показывать лучший результат. Кроме того, олимпиада, являясь интеллектуальным соревнованием, позволяет школьнику не только почувствовать дух соперничества, но и принять себя как часть интеллектуального сообщества, самовыразиться и получить признание своих успехов. Важным бонусом является и то, что, победив на олимпиаде, старшеклассник может облегчить себе поступление в престижный вуз.

В процессе обучения по программе «Подготовка к олимпиадам по математике» обучающиеся знакомятся с форматом основных региональных и всероссийских олимпиад по математике, практикуются в выполнении олимпиадных заданий разного уровня сложности. Обучение по программе позволяет ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы.

3. Цели и задачи

Организационно-педагогической целью образовательной программы «Подготовка к олимпиадам по математике» является создание образовательного пространства, позволяющего подготовить обучающихся к успешному участию в олимпиадах по математике.

Дидактическая цель программы – развитие мышления (в частности нестандартного), творческих способностей обучающихся в процессе решения олимпиадных математических задач.

Задачи:

- углубить и расширить знания обучающихся в области математики;
- способствовать развитию способности глубоко понимать математические законы и умения самостоятельно применять их в различных ситуациях;
- способствовать развитию интуиции, выработки определенной техники для быстрого улавливания содержания задачи;
- способствовать усвоению алгоритмов решения нестандартных математических задач;
- способствовать развитию навыка исследовательской работы;
- способствовать развитию навыка решения экспериментальных задач.

4. Ожидаемые результаты освоения программы/ модуля

Обучающиеся, освоившие программу, должны знать:

- содержание основных понятий и алгоритмов алгебры и геометрии;
- основные источники информации по олимпиадной математике и способы работы с ними;
- правила работы в группе;
- алгоритм работы над исследовательской задачей.

Обучающиеся, освоившие программу, должны уметь:

- формулировать проблему и цель деятельности;
- находить, анализировать, отбирать, структурировать информацию;
- решать олимпиадные задачи по математике разного вида и уровня сложности;
- выбирать рациональный способ решения задачи;
- сравнивать разные способы решения задачи;
- отбирать критерии оценивания результата деятельности.

Обучающиеся, освоившие программу, должны владеть навыками:

- самостоятельной математической и творческой деятельности по решению олимпиадных задач по математике;
- работы с информацией;

- группового взаимодействия;
- разработки и реализации математического исследования.

5. Учебный план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Диофантовы уравнения	18	4	14	Зачет
2.	Модуль 2. Неравенств	22	11	11	Зачет
3.	Модуль 3. Геометрия	20	8	12	Зачет
ИТОГО		60	23	37	

6. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	Количество часов		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Диофантовы уравнения	18	4	14	
1.1.	Основные типы диофантовых уравнений и способы их решения	4	2	2	
1.2.	Пифагоровы тройки чисел. Однородные квадратные уравнения с тремя переменными	3		3	
1.3.	Цепные дроби и их использование в решении диофантовых уравнений. Уравнения Пелля	3		3	
1.4.	Показательные диофантовы уравнения	3		3	
1.5.	Великая теорема Ферма. Частные случаи и их решения	4	2	2	
1.6.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
2.	Модуль 2. Неравенства	22	11	11	
2.1.	Основные методы доказательства неравенств	3	2	1	
2.2.	Неравенство о средних	2	1	1	
2.3.	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	2	1	1	
2.4.	Индукция в доказательстве неравенств	2	1	1	
2.5.	Симметричные и однородные неравенства	2	1	1	
2.6.	Циклические и круговые неравенства	2	1	1	
2.7.	Иррациональные неравенства	2	1	1	
2.8.	Транснеравенства	2	1	1	
2.9.	Метод Штурма	2	1	1	
2.10	Условные неравенства	2	1	1	
2.11	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
3.	Модуль 3. Геометрия	20	8	12	
3.1.	Подобные треугольники	2	1	1	
3.2.	Вписанный угол	2	1	1	
3.3.	Окружности	2	1	1	
3.4.	Площадь	2	1	1	
3.5.	Треугольники	2	1	1	
3.6.	Многоугольники	3	1	2	
3.7.	Геометрические места точек	3	1	2	

3.8.	Построения	3	1	2	
3.9.	Промежуточная аттестация	1		1	Зачет
ИТОГО:		60	23	37	

7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Содержание обучения
Модуль 1. Диофантовы уравнения		
1.1.	Основные типы диофантовых уравнений и способы их решения	Теория: Метод прямого перебора. Метод «спуска». Метод разложения на множители. Метод суммы квадратов. Метод оценки. Метод остатков. Практика: Использование параметра. Сравнение по модулю.
1.2.	Пифагоровы тройки чисел. Однородные квадратные уравнения с тремя переменными	Практика: Получение формул для нахождения примитивных пифагоровых троек и их применение. Получение формул для решения однородных квадратных уравнений с тремя переменными.
1.3.	Цепные дроби и их использование в решении диофантовых уравнений. Уравнения Пелля	Практика: Перевод рационального числа в цепную дробь. Использование цепных дробей в решении линейных уравнений с двумя неизвестными. Решение уравнения Пелля.
1.4.	Показательные диофантовы уравнения	Практика: Использование свойств сравнений чисел по модулю в решении показательных уравнений.
1.5.	Великая теорема Ферма. Частные случаи и их решения	Теория: История Великой теоремы Ферма. Практика: Решение её частных случаев для показателей 3, 4, 5.
Модуль 2. Неравенства		
2.1.	Основные методы доказательства неравенств	Теория: Основные методы доказательства неравенств. Практика: Доказательство неравенств с использованием разложения на множители, выделения полных квадратов, разбиения, промежуточной оценки, подстановки, замены переменных, упорядочивания переменных.
2.2.	Неравенство о средних	Теория: Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и неравенства между ними. Практика: Использование неравенства о средних степенных в доказательстве неравенств.
2.3.	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	Теория: Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Практика: Доказательство неравенств с использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца и следствий из него.
2.4.	Индукция в доказательстве неравенств	Теория: Индукция в доказательстве неравенств. Практика: Применение метода математической индукции в доказательстве неравенств.
2.5.	Симметричные и однородные неравенства	Теория: Доказательство симметричных и однородных неравенств. Уменьшение количества переменных. Практика: Использование симметрической замены переменных.
2.6.	Циклические и круговые неравенства	Теория: Доказательство циклических и круговых неравенств.

		Практика: Использование метода неопределённых коэффициентов и весового неравенства Коши.
2.7.	Иррациональные неравенства	Теория: Иррациональные неравенства. Практика: Доказательство иррациональных неравенств с использованием устранения иррациональности, а также ранее изученных методов и известных неравенств.
2.8.	Транснеравенства	Теория: Транснеравенства. Практика: Теоремы о перестановочных неравенствах (транснеравенствах) и их использование в доказательстве неравенств. Неравенство Чебышёва – классическое и обобщённое.
2.9.	Метод Штурма	Теория: Метод Штурма. Практика: Использование «сдвигания» и «раздвигания» переменных с сохранением их суммы или произведения для доказательства неравенств.
2.10.	Условные неравенства	Теория: Условные неравенства. Практика: Доказательство неравенств с дополнительными условиями на переменные.
Модуль 3. Геометрия		
3.1.	Подобные треугольники	Теория: Отрезки, заключённые между параллельными прямыми. Отношение сторон подобных треугольников. Отношение площадей подобных треугольников. Треугольник, образованный основаниями высот. Подобные фигуры. Практика: Решение задач.
3.2.	Вписанный угол	Теория: Углы, опирающиеся на равные дуги. Величина угла между двумя хордами. Угол между касательной и хордой. Практика: Связь величины угла с длиной дуги и хорды. Четыре точки, лежащие на одной окружности. Вписанный угол и подобные треугольники. Биссектриса делит дугу пополам. Точка Микеля.
3.3.	Окружности	Теория: Касательные к окружностям. Произведение длин отрезков хорд. Касающиеся окружности. Две касательные, проведённые из одной точки. Практика: Применение теоремы о высотах треугольника. Радиальная ось.
3.4.	Площадь	Теория: Медиана делит площадь пополам. Площади треугольников, на которые разбит четырёхугольник. Прямые, делящие фигуры на равновеликие части. Практика: Вычисление площадей. Формулы для площади четырёхугольника. Перегруппировка площадей.
3.5.	Треугольники	Теория: Вписанная и описанная окружности. Прямоугольные треугольники. Правильный треугольник. Теоремы Менелая и Чебы. Прямая Симсона. Подерный треугольник. Прямая Эйлера и окружность девяти точек. Точки Брокара и Лемуана.
3.6.	Многоугольники	Теория: Вписанные и описанные четырёхугольники. Теорема Птолемея. Пятиугольники. Шестиугольники. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные

		многоугольники. Практика: Решение задач с использованием теоремы Паскаля.
3.7.	Геометрические места точек	Теория: Геометрические места точек (ГМТ) – прямая или отрезок. ГМТ – окружность или дуга окружности. Вписанный угол. Гомотетия. Теорема Карно. Окружность Ферма-Аполлония. Практика: Решение задач.
3.8.	Построения	Теория: Метод геометрических мест точек. Вписанный угол. Подобные треугольники и гомотетия. Практика: Построение треугольников по различным элементам. Построение треугольников по различным точкам. Окружность Аполлония. Построения одной линейкой.

8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

Программа реализуется с использованием мультимедийного оборудования, физического демонстрационного и лабораторного оборудования, наглядных пособий и дидактических материалов.

9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса

Основные формы организации обучения: проведение теоретических (проблемных и традиционных); практических занятий (коллективные формы обсуждения, круглые столы, мозговые штурмы, работа в микрогруппах – решение проблемных ситуаций, моделирование, защита решений), различные формы самостоятельной работы обучающихся, консультации и т.д.

Для более эффективного освоения обучающимися программы целесообразно использовать такие методы как, погружение (индивидуальная работа ученика при поиске возможного решения поставленной задачи), обмен опытом (работа в малых группах (2 чел.), обмен и критика возникших идей), мозговой штурм (обсуждение решений группой из 4–5 человек), подсказка (беглое знакомство с авторским решением, с последующим самостоятельным решением), консультации (консультация у старших и более опытных товарищей).

10. Формы учебной работы

Фронтальная, индивидуальная и групповая работа.

11. Формы контроля

11.1. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Текущий контроль успеваемости осуществляется на основе наблюдений за деятельностью обучающихся в ходе занятий.

Промежуточная аттестация проводится по итогам освоения каждого модуля в форме зачета в виде проверочных работ – олимпиадные задания прошлых лет.

Примерные проверочные работы по модулям и Критерии оценивания

Проверочная работа к модулю 1: «Диофантовы уравнения»

- Найдите все натуральные числа x и y , удовлетворяющие равенству $5x^2 - 7y = 2019$.

Ответ: таких чисел нет.

Решение. Остаток от деления числа 2019 на 7 равен 3, следовательно, остаток от деления 5^{x^2} на 7 также равен 3. Рассмотрим остатки от деления степеней числа 5 на 7, составив следующую таблицу:

5^n	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
Остаток от деления 5^n на 7	5	4	6	2	3	1

Отсюда получаем следующую таблицу для любого целого неотрицательного k :

5^n	5^{6k+1}	5^{6k+2}	5^{6k+3}	5^{6k+4}	5^{6k+5}	5^{6k}
Остаток от деления 5^n на 7	5	4	6	2	3	1

Следовательно $x^2 = 6k + 5$ для некоторого целого неотрицательного k . Квадрат целого числа при делении на 3 может давать в остатке 0 или 1, а правая часть равенства даёт остаток 2 при делении на 3, получаем противоречие. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Замечание. Тот факт, что квадрат натурального числа при делении на 3 даёт в остатке 0 или 1, при проверке считается общеизвестным и не требует доказательства.

2. Найдите все пары натуральных чисел a и n , удовлетворяющих равенству $7a^2 - 2^n = 2019$.

Ответ: $a = 17, n = 2$.

Решение. Если $n = 1$, то a – иррациональное. Если $n = 2$, то $a = 17$. Пусть $n \geq 3$. Тогда 2^n кратно 8. Правая часть равенства нечётна, следовательно, a тоже нечётно. Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, следовательно, $7a^2 - 2^n$ при делении на 8 даёт остаток 7. Число 2019 при делении на 8 даёт остаток 3, получаем противоречие. Следовательно, уравнение имеет единственное решение в натуральных числах.

Замечание. Тот факт, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, при проверке считается общеизвестным и не требует доказательства.

3. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых верно равенство

$$m(5n + 11) = 2021(n + 1).$$

Ответ: $(m, n) \in \{(376, 15), (387, 26), (403, 402), (404, 2423)\}$.

Решение. Найдём все возможные значения наибольшего общего делителя (НОД) чисел $5n + 11$ и $n + 1$. Если $d = \text{НОД}(5n + 11, n + 1)$, то $5n + 11 : d$ и $n + 1 : d$, следовательно, $5n + 5 = 5(n + 1) : d$, тогда $6 = ((5n + 11) - (5n + 5)) : d$, следовательно, $d \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Пусть $5n + 11 = ad$, $n + 1 = bd$ ($a, b \in \mathbb{N}$), тогда $\text{НОД}(a, b) = 1$ и исходное равенство запишется в следующем виде: $mda = 2021db$, то есть

$$2021b = ma.$$

Отсюда получаем, что $2021b : a$, но так как $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $2021 : a$. Число 2021 представимо в виде $43 \cdot 47$, причём оба множителя – простые, поэтому $a \in \{1, 43, 47, 2021\}$. Рассмотрим все 4 случая.

1) $a = 1$, тогда $5n + 11 = ad = d$, следовательно, $n + 1 = bd \geq d = 5n + 11$, получаем противоречие, так как $n + 1 < 5n + 11$.

2) $a = 43$, тогда из равенства (1) получаем $m = 47b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{43d-11}{5}$. Так как при $d \in \{1,3,6\}$ число $43d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 2$. При этом

$$n = \frac{43 \cdot 2 - 11}{5} = 15, b = \frac{n+1}{d} = \frac{16}{2} = 8, m = 47b = 47 \cdot 8 = 376.$$

3) $a = 47$, тогда из равенства (1) получаем $m = 43b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{47d-11}{5}$. Так как при $d \in \{1,2,6\}$ число $47d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 3$. При этом

$$n = \frac{47 \cdot 3 - 11}{5} = 26, b = \frac{n+1}{d} = \frac{27}{3} = 9, m = 43b = 43 \cdot 9 = 387.$$

4) $a = 2021$, тогда из равенства (1) получаем $m = b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{2021d-11}{5}$. Так как при $d \in \{2,3\}$ число $2021d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 1$ и $d = 6$.

4а) При $d = 1$ имеем $n = \frac{2021-11}{5} = 402, b = \frac{n+1}{d} = \frac{403}{1} = 403, m = b = 403.$

4б) При $d = 6$ имеем $n = \frac{2021 \cdot 6 - 11}{5} = 2423, b = \frac{n+1}{d} = \frac{2424}{6} = 404, m = b = 404.$

Итого, получаем 4 пары (m, n) : $(376, 15), (387, 26), (403, 402), (404, 2423).$

Проверочная работа к модулю 2: «Неравенства»

1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+x-y} + \frac{1}{1-x+y} \geq \frac{2}{3-x-y}$ для всех $x, y \in (0; 1]$.

Решение. 1-й способ. Из условия следует, что все знаменатели положительны. Умножим обе части неравенства на произведение этих знаменателей, получим

$$((1-x+y) + (1+x-y))(3-x-y) \geq 2(1+x-y)(1-x+y),$$

т. е. $2(3-x-y) \geq 2(1-(x-y)^2)$, а это равносильно неравенству $(2-x-y) + (x-y)^2 \geq 0$. Последнее неравенство верное, поскольку первое слагаемое неотрицательно в силу того, что $x, y \leq 1$, а второе слагаемое является квадратом действительного числа. Исходное неравенство доказано.

2-й способ. Из известного неравенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, которое верно для всех положительных a и b , следует, что $\frac{1}{1+x-y} + \frac{1}{1-x+y} \geq \frac{4}{2} = 2$. Теперь осталось доказать, что $2 \geq \frac{2}{3-x-y}$, а это следует из того, что $3-x-y \geq 1$.

2. Докажите неравенство

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq (x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy),$$

где $x, y, z \geq 0$.

Решение. Докажем неравенство

$$(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq (z^2 + xy)^2. \quad (*)$$

Раскрыв скобки в обеих частях, получим равносильное неравенство

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + z^4 \geq z^4 + 2xyz^2 + x^2y^2,$$

т.е. $x^2z^2 - 2xyz^2 + y^2z^2 \geq 0$. Последнее неравенство верно, так как

$$x^2z^2 - 2xyz^2 + y^2z^2 = z^2(x - y)^2 \geq 0.$$

Аналогично получаем неравенства

$$(z^2 + x^2)(x^2 + y^2) \geq (x^2 + yz)^2 \text{ и } (x^2 + y^2)(y^2 + z^2) \geq (y^2 + zx)^2.$$

Перемножив два последних неравенства с неравенством (*), после извлечения корня из обеих частей получим нужное неравенство.

3. Положительные числа x, y удовлетворяют неравенству $(x^2 + y^2)(x - y + 1) \geq y$. Докажите, что $x(x + y) \geq y$.

Решение. Так как $x^2 + y^2 > 0$ и $y > 0$, то $x - y + 1 > 0$. Предположим, что утверждение задачи не верно, т.е. $x(x + y) < y$, что равносильно $x^2 < y - xy$. Тогда

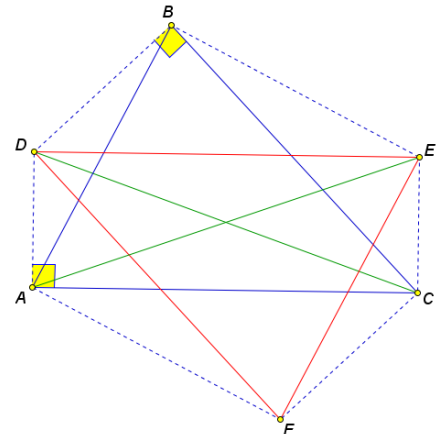
$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(x - y + 1) &< (y - xy + y^2)(x - y + 1) = y(1 - x + y)(x - y + 1) = \\ &= y(1 - (x - y))(1 + (x - y)) = y(1 - (x - y)^2) = y - y(x - y)^2. \end{aligned}$$

Так как по условию $(x^2 + y^2)(x - y + 1) \geq y$, то $y - y(x - y)^2 > y$, что равносильно $y(x - y)^2 < 0$, что невозможно, так как $y > 0$ и $(x - y)^2 \geq 0$.

Проверочная работа к модулю 3: «Геометрия»

1. В остроугольном треугольнике ABC через каждую вершину проведены перпендикуляры к исходящим из этой вершины сторонам. Получившиеся 6 прямых, пересекаясь, образуют выпуклый шестиугольник $ADBECF$. Докажите, что треугольники ABC и EFD равны.

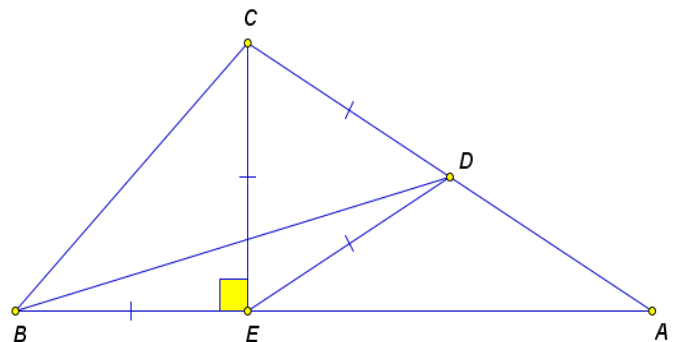
Решение. Докажем, что $DE = AC$. Так как $\angle DBC = \angle DAC = 90^\circ$, то четырёхугольник $ADBC$ вписанный, т.е. точки A, D, B, C лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки E и F лежат на той же окружности. Следовательно, получившийся шестиугольник – вписанный. Вписанные прямые углы $\angle CAD$ и $\angle ACE$ опираются на диаметр, следовательно, AE и DC – диаметры окружности, описанной около $ADBECF$, поэтому $\angle ADE = \angle DEC = 90^\circ$, т.е. $ADEC$ – прямоугольник и поэтому $AC = DE$. Аналогично доказывается, что $BC = DF$ и $AB = EF$, следовательно, треугольники ABC и EFD равны.



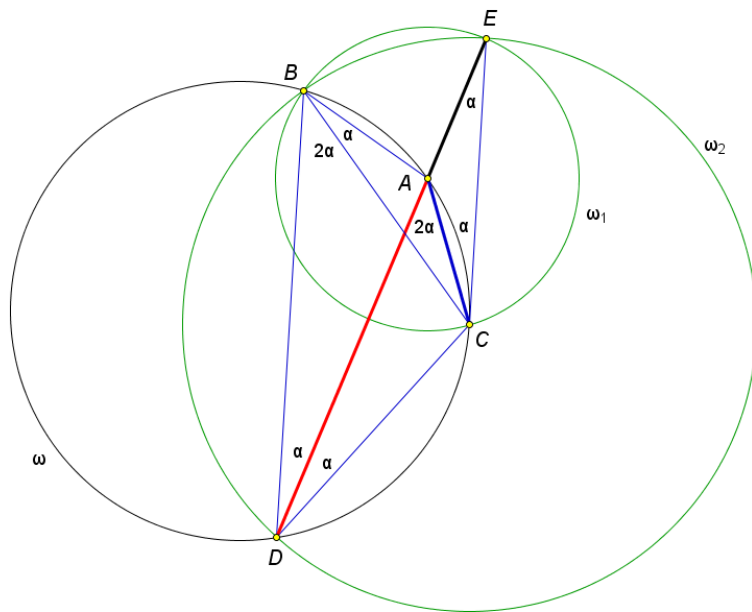
2. В треугольнике ABC с углами A и B , равными 30° и 45° соответственно, проведена медиана BD . Найдите величину угла BDC .

Ответ: 45° .

Решение. Опустим перпендикуляр CE к AB . Треугольник BCE – прямоугольный и равнобедренный, значит, $EC = EB$. Поскольку в прямоугольном треугольнике AEC напротив угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы, то $EC = DC$; а так как медиана ED также равна половине гипотенузы, то $ED = EC = DA = DC$. Отсюда получаем, что треугольник BED – равнобедренный, $\angle BED = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, следовательно, $\angle BDE = 15^\circ$, поэтому $\angle BDC = \angle CDE - \angle BDE = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.



3. На окружности ω выбрана точка A . Окружность ω_1 с центром в точке A пересекает окружность ω в точках B и C (радиус окружности ω_1 меньше радиуса окружности ω). Окружность ω_2 с центром в точке C пересекает окружность ω в точках B и D . Пусть E – ещё одна точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 . Докажите, что точки A , D и E лежат на одной прямой.



Решение. Пусть $\angle BDA = \alpha$. Так как $AB = AC$, то дуги AB и AC окружности ω равны, следовательно, на них опираются равные вписанные углы. Поэтому $\angle ADC = \angle BDA = \alpha$, следовательно, $\angle BDC = \angle ADC + \angle BDA = 2\alpha$. Так как $BC = CD$, то $\angle CBD = \angle BDC = 2\alpha$. Углы $\angle DBC$ и $\angle DAC$ являются вписанными в окружность ω и опираются на одну дугу CD , следовательно, $\angle DAC = \angle DBC = 2\alpha$. Равнобедренные треугольники ABC и AEC равны по трём сторонам, следовательно, $\angle ACE = \angle AEC = \angle ABC = \angle ADC = \alpha$ (углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ вписаны в окружность ω и опираются на одну дугу AC). Тогда $\angle CAE = 180^\circ - 2\angle AEC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle EAD = \angle CAE + \angle DAC = 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, следовательно, точки A , D и E лежат на одной прямой.

Критерии оценивания проверочных работ

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты (не логические), в целом не влияющие на решение
4-5	Решение в целом верное, однако, содержит существенные недочёты (не разобраны важные случаи, имеются недостаточно обоснованные утверждения)
2-3	Задача не решена или решена с ошибками, но имеются обоснованные верные утверждения, важные для решения задачи
1	Задача не решена, но в решении имеется верный пример, отвечающий на вопрос задачи
0	Решение неверное или отсутствует

За каждую работу можно получить до 21 балла.

Баллы	Оценка
11–21 балл	Зачтено
10 и менее	Не зачтено