Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный педагогический университет»

И. Л. Бухбиндер

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИММЕТРИЯ

Учебное пособие

Томск 2012

ББК 22.31
Б 94

Печатается по решению
учебно-методического совета
Томского государственного
педагогического университета

Б 94 Бухбиндер И. Л. Релятивистская симметрия : учебное пособие / И. Л. Бухбиндер; ФГБОУ «Томский государственный педагогический университет». – Томск : Изд-во ТГПУ, 2012. – 104 с.

Пособие содержит базовый материал, лежащий в основе релятивистской классической теории поля в четырех измерениях. Рассматриваются группы Лоренца и Пуанкаре и дается описание их неприводимых представлений. Подробно обсуждается техника спин-тензоров с точечными и неточечными индексами, обычно используемая в суперсимметричной теории поля. Показано как неприводимые представления группы Пуанкаре естественным образом ведут к релятивистским волновым уравнениям для полей со спинами s=0, 1/2, 1, 3/2, 2. Материал рассчитан на первоначальное знакомство с предметом.

ББК 22.31

Рецензент: профессор кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, доктор физико-математических наук **А. В. Галажинский**

Содержание

1 Введение

Настоящее пособие представляет собой часть курса квантовой теории поля, который в течении многих лет читался автором в различных университетах в России и за рубежом. Релятивистская симметрия, выражаемая в терминах групп Лоренца и Пуанкаре, является основой для построения моделей теории поля и поэтому, на наш взгляд, должна быть обязательной частью курса современной теории поля. Важность базовых понятий, связанных с группами Лоренца и Пуанкаре при изучении теории поля в значительной степени обусловлена тем, что эти понятия существенно используются при формулировке суперсимметричных моделей теории поля, супергравитации, теории полей высших спинов.

В пособии подробно рассматривается вывод коммутационных соотношений для генераторов группы Пуанкаре и операторов Казимира для этой группы. Обсуждается связь группы Лоренца и группы $SL(2|\mathbb{C})$, построение неприводимого представление собственной группы Лоренца в линейном пространстве спин-тензоров и свойства спин-тензоров. Изучается структура массивных и безмассовых неприводимых представлений группы Пуанкаре, в том числе и в пространствах полей с целыми и полуцелыми спинами. Эти представления используются для формулировки релятивистских волновых уравнений для полей со спином $s = 0$ (уравнения Клейна-Гордона), со спином $s = \frac{1}{2}$ (уравнения Вейля и Дирака), со спинами $s = 1$ (уравнения Прока и Максвелла), со спином $s = \frac{3}{2}$ (уравнение Рарита-Швингера), со спином $s = 2$ (уравнение Паули-Фирца).

Материал носит учебный характер и предназначен для первоначального изучения предмета. По этой причине практически каждый раздел начинается с качественных мотиваций, формальные рассуждения даются на физическом уровне строгости, вычисления проводятся со всеми деталями с рассмотрением примеров. Для удобства читателя в пособие включен краткий обзор основных понятий теории групп Ли, который конечно не может заменить систематический курс теории групп и служит скорее напоминанием того, что предполагается использовать.

В пособии приведен небольшой список литературы для дальнейшего, более глубокого изучения, обсуждаемых здесь вопросов. Значительная часть, рассматриваемого в пособии материала основана на монографии I.L. Buchbinder, S.V. Kuzenko, Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace, IOP Publishing, 1998.

2 Основные понятия теории групп Ли

Напомним базовые понятия теории групп Ли, которые далее будут широко использоваться.

Группой G называется множество элементов $g_1, g_2, ...$, в котором определено произведение элементов, называемое также операцией умножения или композицией и удовлетворяющее следующим условиям:

1. Замкнутость. Для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ их произведение $g_1 g_2 \in G$

2. Ассоциативность. Для любых трех элементов $g_1, g_2, g_3 \in G$ выполняется $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3 = g_1 g_2 g_3$.

3. Существование единичного элемента. Существует такой элемент $e \in G$, что для любого элемента $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$. Элемент e называется единичным элементом или единицей группы.

4. Существование обратного элемента. Для любого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$, такой что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$. Элемент g^{-1} называется элементом обратным к элементу g.

Используя эти свойства можно доказать единственность и единичного и обратного элементов и соотношение $e^{-1} = e$.

Группа называется коммутативной или абелевой, если для любых двух ее элементов $g_1, g_2 \in G$ выполняется $g_1 g_2 = g_2 g_1$. В противном случае группа называется некоммутативной или неабелевой. Последнее означает, что существуют два элемента $g_1, g_2 \in G$ такие, что $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$.

Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой группы G, если H есть группа относительно той же операции умножения, что и в группе G.

Другими словами, единичный элемент $e \in G$ принадлежит H, если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$ и если $h_1 h_2 \in G$, то $h_1 h_2 \in H$.

Группа, состоящая из конечного числа элементов называется конечной, а число ее элементов - порядком группы. В этом случае можно записать явно произведение всех элементов группы, то есть составить таблицу g_i, g_j, называемую таблицей умножения группы.

Иногда конечную группу называют конечной дискретной группой. Если множество G счетно, то соответствующая группа называется бесконечной дискретной группой. Если множество G несчетно и является топологическим пространством, то соответствующая группа называется непрерывной. Мы в основном будем рассматривать специальный класс непрерывных групп, называемых группами Ли.

Две группы G и G' являются гомоморфными, если существует отображение f группы G в группу G', такое, что для любых элементов $g_1, g_2 \in G$ выполняется

$$\begin{aligned} f(g_1 g_2) &= f(g_1) f(g_2) \\ f(g^{-1}) &= f^{-1}(g) \end{aligned}$$

Указанное отображение называется гомоморфизмом. При этом можно показать, что $f(e) = e'$ где e' - это единица в группе G'. Взаимно однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом, а соответствующие группы называются изоморфными. По существу изоморфные группы неотличимы друг от друга. Изоморфизм группы обычно записывается как $G = G'$.

Группа называется группой Ли, если любой ее элемент является непрерывной, дифференцируемой функцией набора вещественных параметров θ^a, $a = 1, 2, ...N$. То есть $g = g(\theta)$. При этом без потери общности параметры θ можно выбрать так, что $g(\theta)|_{\theta^a=0} = e$. Таким образом, группа Ли, обладает тремя структурами:

1. G - это группа;

2. G - это топологическое пространство, то есть для элементов множества G определено понятие близости;

3. G - это дифференцируемое многообразие, то есть каждый элемент g есть дифференцируемая функция конечного числа вещественных координат.

Рассмотрим множество обратимых линейных операторов, действующих в линейном пространстве. Очевидно, что это множество является группой относительно умножения операторов. Такая группа используется для определения представления группы. Представление R группы G называется отображение группы G в группу линейных операторов, действующих в некотором линейном пространстве V

$$g \to D_R(g)$$

причем

$$D_R(g^{-1}) = D_R^{-1}(g)$$
$$D_R(g_1 g_2) = D_R(g_1) D_R(g_2)$$

Можно сказать, что представление группы - это гомоморфизм группы в группу линейных операторов. Операторы $D_R(g)$ называются операторами представления, а пространство в котором они действуют - пространством представления.

Мы в основном будем рассматривать матричные представления, где элементу группы g сопоставляется $n \times n$ матрица $D_R(g)^i{}_j, \quad i, j = 1, 2, ...n$. В этом случае число n называется размерностью представления. Концепция представления позволяет трактовать абстрактную группу как группу преобразований в некотором линейном пространстве. Пусть v вектор пространства представления с координатами $v^1, v^2, ...v^n$ относительно некоторого базиса. Преобразования генерируемые матрицами $D_R(g)^i{}_j$ выглядят так

$$v'^i = D_R(g)^i{}_j v^j$$

здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть R - представление группы G в линейном пространстве V и пусть $\tilde{V} \subset V$, где $\tilde{V}$ подпространство в V. Если для любого вектора

$\tilde{v} \in \tilde{V}$ и для любого оператора $D_R(g)$ выполняется $D_R(g)\tilde{v} \in \tilde{V}$, то подпространство $\tilde{V}$ называется инвариантным подпространством представления R. Любое представление имеет всегда два инвариантных подпространства называемых тривиальными. Это подпространство $\tilde{V} = V$ и $\tilde{V} = \{0\}$(состоит из одного нулевого вектора). Все остальные инвариантные подпространства, если они существуют, называются нетривиальными. Представление R называется приводимым, если оно имеет нетривиальные инвариантные подпространства. В противном случае оно называется неприводимым. Другими словами, представление R называется неприводимым, если оно имеет только тривиальные инвариантные подпространства. Представление называется полностью приводимым, если все матрицы представления $D_R(g)$ в некотором базисе имеют блочно-диагональный вид

$$D_R(g) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{D_2(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{D_k(g)} \end{pmatrix}$$

Это означает, что пространство представления имеет k нетривиальных инвариантных подпространств, в каждом из которых задано неприводимое представление.

Конкретная группа Ли может иметь различные представления, в каждом из которых матрицы $D_R(g)$ имеют свой специфический вид. Однако, существуют определенные свойства группы Ли, не зависящие от представления. Эти свойства формулируются в терминах алгебры Ли. Пусть $D_R(g)$ - операторы представления R и $g = g(\theta)$. Тогда все операторы $D_R(g)$ будут функциями N параметров $\theta^1, \theta^2, ..., \theta^N$, то есть $D_R(g) = D_R(\theta)$ и $D_R(\theta)|_{\theta^a=0} = D_R(e) = \mathbf{1}$. Где $\mathbf{1}$ - единичная матрица. тогда в окрестности единичного элемента можно записать

$$D_R(\theta) = \mathbf{1} + i\theta^a T_{Ra},$$
$$T_{Ra} = -i\left.\frac{\partial D_R(\theta)}{\partial \theta^a}\right|_{\theta=0}$$

Операторы T_{Ra} называются генераторами группы G в представлении R. Можно показать, что любой оператор $D_R(\theta)$, который может быть получен непрерывной деформацией из единичного элемента, имеет следующий вид

$$D_R(\theta) = e^{i\theta^a T_{Ra}}$$

Мнимую единицу i удобно выделить из условия, что если матрицы D_R - унитарны, $D_R^+ D_R = \mathbf{1}$, то матрицы T_{Ra} - эрмитовы, $T_{R\,a}^+ = T_{Ra}$. Можно показать, генераторы удовлетворяют следующим соотношениям в терминах коммутаторов

$$[T_{Ra}, T_{Rb}] = i f_{ab}{}^c T_{Rc}$$

где $f_{ab}{}^c$ - константы, называемые структурными постоянными группы. При этом очевидно, что $f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c$. Вид матриц T_R зависит от представления, однако, можно доказать, что структурные постоянные от представления не зависят и характеризуют исходную группу G.

Генераторы группы тесно связаны с понятием алгебры Ли. Пусть A линейное пространство с элементами $a_1, a_2, ...a_N, ...$ Линейное пространство A называется алгеброй Ли, если для любых ее элементов определена операция умножения $[a_1, a_2] \in A$ такая, что

1. $[a_1, a_2] = -[a_2, a_1]$
2. $[c_1 a_1 + c_2 a_2, a_3] = c_1[a_1, a_3] + c_2[a_2, a_3]$
3. $[a_1, [a_2, a_3]] + [a_2, [a_3, a_1]] + [a_3, [a_1, a_2]] = 0$

Здесь c_1, c_2 - вещественные или комплексные числа. Последнее из приведенных выше трех соотношений называется тождеством Якоби. Нетрудно проверить, что коммутатор операторов удовлетворяет всем свойствам операции умножения в алгебре Ли. Поэтому генераторы T_{Ra} автоматически формируют алгебру Ли, ассоциированную с группой Ли. Более точно они задают представление алгебры Ли в том смысле, что задано отображение T алгебры Ли A в линейное пространство операторов такое, что

$$T: \; a \to T(a)$$

$$[a_1, a_2] \to [T(a_1), T(a_2)]$$

Алгебра Ли называется коммутативной или абелевой, если для любых элементов $a_1, a_2 \in A$ выполняется $[a_1, a_2] = 0$, в противном случае она называется неабелевой. Можно показать, что алгебра Ли, ассоциированная с абелевой группой Ли, является абелевой алгеброй.

При изучении представлений группы Ли важную роль играют операторы Казимира,следующим образом. Пусть T_{Ra} - генераторы представления группы, операторами Казимира C_R называются функции генераторов, коммутирующие со всеми генераторами T_{Ra}. Имеет место лемма Шура, согласно которой в каждом неприводимом представлении оператор Казимира пропорциональности единичному оператору. При этом коэффициент пропорциональности характеризует данное конкретное неприводимое представление.

3 Преобразования Лоренца

Физические явления происходят в пространстве и во времени, поэтому фундаментальные физические теории должны естественным образом включать в себя положения о структуре пространства и времени. В основе современных представлений о пространств и времени лежит специальная теория относительности.

Согласно специальной теории относительности структур пространства-времени (без учета гравитации) задается следующими фундаментальными постулатами;

1. Пространство и время однородны.

2. Пространство изотропно.

3. Существует максимальная скорость распространения любого взаимодействия, совпадающая со скоростью света. В любой инерциальной системе отсчета скорость света имеет одно и тоже значение c.

Эти постулаты означают, что пространство и время представляют собой четырехмерное пространство Минковского, то есть 4-мерное многообразие, снабженное координатой x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ и инвариантной квадратичной формой или интервалом

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

где матрица η имеет вид

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Координаты x^μ трактуются как момент времени (x^0) и координаты в трехмерном эвклидовом пространстве $(x^i, i = 1, 2, 3)$ рассматриваемого события, относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Здесь $x^0 = ct$, где t момент времени, а $x^i = (x, y, z)$ трехмерные координаты, определяющие место события в трехмерном пространстве.

Инвариантность интервала означает следующее. Пусть заданы два бесконечно близких события P и Q и пусть в некоторой инерциальной системе отсчета они имеют координаты x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ соответственно, а в любой другой инерциальной системе отсчета они имеют координаты x'^μ и $x'^\mu + dx'^\mu$ соответственно. Тогда форма интервала (1) не зависит от того, координаты какой из этих двух инерциальных систем были использованы при интервала. То есть

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2$$

Или

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{3}$$

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении следствий, вытекающих из условия инвариантности формы интервала.

Установим связь между координатами x'^μ и x^μ, согласованную с соотношением (3). Предположим, что в общем случае $x'^\mu = f^\mu(x)$ с произвольной функцией $f^\mu(x)$. Тогда из соотношения (3) получим

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Так как dx^α, dx^β произвольны, то

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

В этом соотношении правая часть не зависит от координат, поэтому и левая часть не должна зависеть от координат. Это возможно лишь когда

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} = \Lambda^\mu{}_\alpha = const$$

Отсюда

$$f^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha + a^\mu,$$

где a^μ - произвольный постоянный 4-вектор. При этом из соотношения (4) получаем

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{5}$$

Таким образом, наиболее общее преобразование координат, сохраняющее форму интервала (3) имеет вид

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha + a^\mu \tag{6}$$

где a^μ - константы и матрица $\Lambda^\mu{}_\alpha$ удовлетворяет соотношению (5). Преобразования (6) называются неоднородными преобразованиями Лоренца. Если $a^\mu = 0$, то соответствующее преобразование координат

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \tag{7}$$

называются однородными преобразованиями Лоренца или просто преобразованиями Лоренца.

Пусть Λ - матрица с элементами $\Lambda^\mu{}_\nu$, обозначим транспонированную матрицу Λ^T, $(\Lambda^T)_\mu{}^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu$. Тогда соотношение (5) можно переписать в виде

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta. \tag{8}$$

Будем называть (8) базовым соотношением для матриц Λ, осуществляющих однородное или неоднородное преобразования Лоренца.

Приведем некоторые примеры преобразований Лоренца

a. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R^i{}_j \end{pmatrix} \tag{9}$$

где $R = R^i{}_j$ матрица 3×3. Подставляя (9) в (8) получим условия на матрицу R

$$R^T R = 1, \tag{10}$$

где 1 - 3×3 единичная матрица с элементами $\delta^1{}_j$. R, удовлетворяющие (10) осуществляют преобразования координат 3-мерного пространства

$$x'^i = R^i{}_j x^j,$$

сохраняющие евклидову длину вектора, то есть

$$\delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} x^i x^j.$$

Такие матрицы называются матрицами вращения трехмерного эвклидова пространства. Можно показать, что данные матрицы образуют группу относительно обычного умножения матриц. Эта группа называется трехмерной группой вращений и обозначаются $O(3)$.

b. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

где v, c вещественные константы, причем $c > 0,\ |v| < c$. Нетрудно проверить, что матрицы (11) удовлетворяют базовому соотношению (8), поэтому они осуществляют некоторое преобразование Лоренца. Запишем это преобразование в явном виде, имеем

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0 + \frac{v}{c}x^3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x'^1 &= x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= \frac{x^3 + \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{12}$$

Преобразование (12) называется лоренцевским бустом вдоль оси x^3. Константа c ассоциируется со скоростью света.

c. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_T осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x'^0 &= -x^0 \\ x'^i &= x^i \end{aligned} \tag{14}$$

и называется обращением времени.

d. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_P осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^i &= -x^i \end{aligned} \tag{16}$$

и называется пространственным отражением.

e. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_{PT} = \Lambda_{TP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_P осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$x'^\mu = -x^\mu \tag{18}$$

и называется полным отражением.

Преобразования (13), (15), (17) называются дискретными преобразованиям Лоренца.

4 Группа Лоренца

Рассмотрим множество всех преобразований Лоренца (7) вида

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

где матрицы Λ удовлетворяют базовому соотношению (8). Очевидно, что каждое преобразование Лоренца однозначно задается матрицей Λ и наоборот. Поэтому можно сказать, что множество вех преобразований Лоренца это множество всех матриц Λ, удовлетворяющих соотношению (8).

Совершим два последовательных преобразования Лоренца

$$x'^\alpha = \Lambda_1{}^\alpha{}_\nu x^\nu, \quad x'^\nu = \Lambda_2{}^\nu{}_\alpha x^\alpha \tag{19}$$

Отсюда

$$x''^{\mu} = \Lambda_2{}^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda_1{}^{\alpha}{}_{\nu}x^{\nu} = (\Lambda_2\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu},$$

где $\Lambda_2\Lambda_1$ есть произведение матриц Λ_2 и Λ_1. Покажем, что если Λ_1 и Λ_2 удовлетворяют базовому соотношению (8), то и их произведение удовлетворяет базовому соотношению (8). Имеем

$$(\Lambda_2\Lambda_1)^T\eta(\Lambda_2\Lambda_1) = \Lambda_1^T(\Lambda_2^T\eta\Lambda_2)\Lambda_1 = \Lambda_1^T\eta\Lambda_1 = \eta$$

Следовательно матрица $(\Lambda_2\Lambda_1)$ осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Пусть матрица Λ удовлетворяет базовому соотношению (8), покажем, что соответствующая обратная матрица Λ^{-1} всегда существует. Из базового соотношения (8) следует

$$\det(\Lambda^T\eta\Lambda) = \det\eta$$

Или

$$\det\Lambda^T\det\eta\det\Lambda = \det\eta$$

Очевидно, что $\det\eta = -1 \neq 0$. Поэтому

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \tag{20}$$

и значит $\det\Lambda \neq 0$. Поэтому для любой матрицы, осуществляющей преобразование Лоренца, обратная матрица всегда существует. Покажем, что матрица Λ^{-1} отвечает некоторому преобразованию Лоренца. Имеем

$$(\Lambda^T\eta\Lambda) = \eta$$

Поэтому

$$(\Lambda^T)^{-1}\Lambda^T\eta\Lambda\Lambda^{-1} = (\Lambda^T)^{-1}\eta\Lambda^{-1}$$

Или

$$(\Lambda^{-1})^T\eta\Lambda^{-1} = \eta$$

То есть, если матрица Λ удовлетворяет (8), то матрица Λ^{-1} также удовлетворяет (8).

Очевидно, что единичная 4×4 матрица I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

удовлетворяет соотношению (8). То есть матрица I описывает некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$x'^{\mu} = x^{\mu}$$

и называется единичным или тождественным преобразованием.

Таким образом, множество всех преобразований Лоренца, образует группу, если групповое умножение определено как последовательное выполнение двух преобразований. Поскольку каждое преобразование Лоренца однозначно задается матрице Λ, удовлетворяющей (8) и наоборот, то можно сказать что группа Лоренца это группа матриц Λ, удовлетворяющих (8), где операция группового умножения определена как умножение матриц. Обратный элемент, отвечающий матрице Λ это матрица Λ^{-1}, единичный элемент группы это единичная матрица I. Определенная таким образом группа называется группой Лоренца и обозначается $O(3,1)$ или L.

Рассмотрим более подробно структуру группы Лоренца. Из соотношения (20) следует, что

$$\det\Lambda = 1 \quad \text{либо} \quad \det\Lambda = -1.$$

Введем непрерывную кривую на группе L как множество матриц $\Lambda(\tau)$, удовлетворяющих (8) и непрерывно зависящих вещественного параметра τ. Допустим, что существуют такие τ_1 и τ_2, что $\det\Lambda(\tau_1) = 1$ и $\det\Lambda(\tau_2) = -1$. Так как $\det\Lambda(\tau)$ есть непрерывная функция Λ и, значит, непрерывная функция τ, то существует такое значение τ_0, лежащее между τ_2 и τ_1, что $\det\Lambda(\tau_0) = 0$. Но по условию, для любой матрицы $\Lambda(\tau)$ выполнено соотношение (20). Возникает противоречие, показывающее что непрерывная кривая $\Lambda(\tau)$ с указанными свойствами не существует. Следовательно группа Лоренца разбивается на два подмножества

L_+, L_-, называемые компонентами связности. Если $\Lambda \in L_+$, то $\det \Lambda > 0$, если $\Lambda \in L_-$, то $\det \Lambda < 0$. При этом не существует непрерывной кривой, соединяющей матрицы из разных компонент связности. Заметим, что единичный элемент группы Лоренца матрица $I \in L_+$. Ясно, что если $\Lambda_2, \Lambda_1 \in L_+$, то $\Lambda_2\Lambda_1 \in L_+$ и если $\Lambda \in L_+$ то и $\Lambda^{-1} \in L_+; \quad 1 \in L_+$. Это значит, что подмножество L_+ образует группу, являющуюся подгруппой группы Лоренца. Множество L_- не образует подгруппу, так как оно не содержит единичного элемента.

Рассмотри соотношение (5)

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Положим здесь $\alpha = \beta = 0,\ \eta_{00} = 1$, получим

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = 1$$

Или

$$\eta_{00}\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} + \eta_{ij}\Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{j}{}_{0} = 1$$

Или

$$\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} - \delta_{ij}\Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{j}{}_{0} = 1$$

Или

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2 \tag{22}$$

Отсюда следует, что $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^{0}{}_{0} > 0,$ либо $\Lambda^{0}{}_{0} < 0$. Таким образом возможны два случая

$$sign\Lambda^{0}{}_{0} = 1, \quad \text{либо} \quad sign\Lambda^{0}{}_{0} = -1 \tag{23}$$

Поскольку функция $sign\Lambda^{0}{}_{0}$ меняется скачком, то не существует непрерывной функции $\Lambda^{0}{}_{0}$, связывающей множество матриц Λ, где $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$, и множество матриц Λ, где $\Lambda^{0}{}_{0} < 0$. Следовательно, каждое из множеств $L_{\pm}$ разбивается на два подмножества или две компоненты связности, обозначаемые $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$. Таким образом группа Лоренца характеризуется четырьмя компонентами связности

$$\begin{array}{ll} \Lambda \in L_+^\uparrow, & \det\Lambda = 1, \quad sign\Lambda^0{}_0 = 1 \\ \Lambda \in L_+^\downarrow, & \det\Lambda = 1, \quad sign\Lambda^0{}_0 = -1 \\ \Lambda \in L_-^\uparrow, & \det\Lambda = -1, \quad sign\Lambda^0{}_0 = 1 \\ \Lambda \in L_-^\downarrow, & \det\Lambda = -1, \quad sign\Lambda^0{}_0 = -1 \end{array}$$

Напомним некоторые понятия. Вектор A^μ называется времениподобным, если $A^\mu A_\mu > 0$, пространственноподобным, если $A^\mu A_\mu < 0$ и светоподобным или изотропным, если $A^\mu A_\mu = 0$. Поскольку при преобразованиях Лоренца $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$, где A'^μ получается из A^μ с помощью преобразований Лоренца, то свойство инвариантно вектора быть времениподобным, пространственноподобным или изотропным является инвариантным. Пусть A^μ времениподобный вектор и пусть $A^0 > 0$. В этом случае говорят, что данный вектор направлен в будущее. Если $A^0 < 0$, то говорят что данный вектор направлен в прошлое. Можно показать следующее, если $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ и A^μ - времениподобный вектор, то

$$A^0 > 0, \quad \Lambda^0{}_0 > 0 \;\Rightarrow\; A'^0 > 0$$

$$A^0 < 0, \quad \Lambda^0{}_0 > 0 \;\Rightarrow\; A'^0 < 0$$

Это означает, что условие $\Lambda^0{}_0 > 0$ имеет инвариантный смысл, соответствующее преобразование Лоренца сохраняет направленность времениподобных векторов в будущее или прошлое. По этой причине преобразования Лоренца, для которых $\Lambda^0{}_0 > 0$ называются ортохронными.

Продолжим обсуждение группы Лоренца L. Мы установили, что она содержит четыре компоненты связности.

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow \tag{24}$$

Покажем, что множество $L_+^\uparrow$ образует группу. Очевидно единичная матрица $I \in L_+^\uparrow$. Можно показать, что если $\Lambda_1{}^0{}_0 > 0, \Lambda_2{}^0{}_0 > 0$, то $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 > 0$ и если $\Lambda^0{}_0 > 0$, то $(\Lambda^{-1})^0{}_0 > 0$. Докажем только второе утверждение, первое доказывается аналогичным образом. Из соотношения (5) получим

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Или

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\gamma} = \eta_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\gamma}$$

Или

$$\eta_{\mu\gamma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\gamma}$$

Или

$$\eta_{\mu\gamma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\gamma}$$

Поэтому

$$(\Lambda^{-1})^{0}{}_{0} = \eta_{\mu 0}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha 0} = \Lambda^{0}{}_{0} > 0$$

Таким образом множество матриц $L_{+}^{\uparrow}$ является группой, которая называется собственной группой Лоренца и обозначается $SO(3,1)^{\uparrow}$. Обозначение отражает тот факт, что рассматривается группа матриц Λ с определителем равным единице, сохраняющих квадратичную форму (1) с тремя отрицательными собственными значениями и одним положительным собственным значением и обладающих свойством $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$. Иногда группу L называют расширенной группой Лоренца, а $L_{+}^{\uparrow}$ просто группой Лоренца.

Отметим основные свойства для остальных компонент связности расширенной группы Лоренца. Рассмотрим соотношение (24). Можно показать

1. Если $\tilde{\Lambda} \in L_{-}^{\uparrow}$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_P\Lambda$, где $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$ и Λ_P есть пространственное отражение.

2. Если $\tilde{\Lambda} \in L_{-}^{\downarrow}$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_T\Lambda$, где $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$ и Λ_T есть обращение времени.

3. Если $\tilde{\Lambda} \in L_{+}^{\downarrow}$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{PT}\Lambda$, где $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$ и Λ_{PT} есть полное отражение.

Таким образом, произвольное преобразование Лоренца - это либо собственное преобразование Лоренца либо собственное преобразование Лоренца, дополненное дискретными преобразованиями $\Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT}$.

Найдем бесконечно малую форму преобразования Лоренца (7) Запишем матрицу Λ в виде

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \tag{25}$$

где $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ матрица с бесконечно малыми элементами. Матрице (25) отвечает следующее преобразование Лоренца

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{26}$$

Выясним какие условия на $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, накладывает базовое соотношением (8). Имеем

$$(1+\omega)^T \eta (1+\omega) = \eta$$

В первом порядке по ω получим

$$\eta + \omega^T \eta + \eta\omega = \eta$$

Или

$$\eta\omega = -\omega^T \eta$$

Отсюда

$$\eta_{\mu\alpha}\omega^{\alpha}{}_{\nu} = -(\omega^T)_{\mu}{}^{\alpha}\eta_{\alpha\nu}$$

То есть

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{27}$$

Матрица $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ в соотношении (25) является антисимметричной. Преобразование (26) принадлежит группе $L_{+}^{\uparrow}$, действительно

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \delta^{0}{}_{0} + \omega^{0}{}_{0} = 1 + \omega^{0}{}_{0} > 0$$

$$\det(1+\omega) = 1 + \mathrm{tr}\omega = 1 + \eta^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = 1$$

Учтено что $\omega^{0}{}_{0}$ - бесконечно малый параметр. Очевидно, что вещественная антисимметричная 4×4 матрица имеет в окрестности единичного элемента шесть независимых вещественных элементов. Поэтому группа Лоренца является шести параметрической группой Ли.

5 Группа Пуанкаре

Обратимся теперь к неоднородным преобразованиям Лоренца

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu},$$

где матрица Λ удовлетворяет базовому соотношению (8). Мы видим, что произвольное неоднородное преобразование Лоренца задается матрицей Λ и вектором a^{μ}, будем записывать такое преобразование как (Λ, a). Рассмотрим два неоднородных преобразования Лоренца (Λ_1, a_1) и (Λ_2, a_2) и выполним их последовательно одно за другим. Получим

$$x'^{\alpha} = \Lambda_1{}^{\alpha}{}_{\nu}x^{\nu} + a_1^{\alpha}, \quad x''^{\mu} = \Lambda_2{}^{\mu}{}_{\alpha}x'^{\alpha} + a_2^{\mu}$$

Отсюда

$$x''^{\mu} = \Lambda_2{}^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda_1{}^{\alpha}{}_{\nu}x^{\nu} + a_1^{\alpha}) + a_2^{\mu} = (\Lambda_2\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + (\Lambda_2 a_1)^{\mu} + a_2^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{28}$$

где $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (\Lambda_2\Lambda_1)^{\mu}{}_{\nu}$, $a^{\mu} = (\Lambda_2 a_1)^{\mu} + a_2^{\mu}$. Ясно, что a^{μ} - это постоянный 4-вектор, а Λ удовлетворяет базовому соотношению (8), поскольку каждая из матриц Λ_1, Λ_2 удовлетворяет базовому соотношению. Поэтому соотношение (28) снова есть неоднородное преобразование Лоренца. То есть, результат последовательного выполнения двух неоднородных преобразований Лоренца является некоторым преобразованием Лоренца. Мы будем записывать это обстоятельство так

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{29}$$

Покажем, что множество всех неоднородных преобразований Лоренца образует группу, где в качестве группового произведения используется последовательное выполнение двух таких преобразований. Поскольку каждое неоднородное преобразование Лоренца однозначно задается матрицей Λ и вектором a^{μ} и наоборот, то покажем, что множество величин (Λ, a) с законом умножения (29) образует группу. Определим единичный элемент как $(I, 0)$ где I единичная 4×4 матрица. Тогда из (29) получим

$$(\Lambda, a)(I, 0) = (\Lambda I, \Lambda 0 + a) = (\Lambda, a)$$
$$(I, 0)(\Lambda, a) = (I\Lambda, Ia + 0) = (\Lambda, a)$$

То есть $(I, 0)$ действительно единичный элемент. Определим элемент обратный к элементу (Λ, a) как $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. Тогда получим

$$(\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (I, 0)$$
$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)(\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda,\ \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (I, 0)$$

То есть $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ действительно обратный элемент, Таким образом, все условия, определяющие группу выполнены. Данная группа называется неоднородной группой Лоренца или группой Пуанкаре. Мы будем обозначать ее $\mathcal{P}$.

Группа Пуанкаре имеет две очевидные подгруппы. Одну из них формируют элементы вида $(I, 0)$, осуществляющие преобразования

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \tag{30}$$

Операция умножения согласно (29) есть

$$(I, a_2)(I, a_1) = (I, a_1 + a_2)$$

Здесь единичный элемент - это $(I, 0)$, элемент обратный к элементу (I, a) есть $(I, -a)$. Эта подгруппа называется группой трансляций, соответствующие преобразования (30) называются пространственно-временными трансляциями. Другая подгруппа формируется элементами $(\Lambda, 0)$ и представляет собой группу Лоренца.

Поскольку группа Лоренца состоит из четырех компонент связности $L_+{}^{\uparrow}$, $L_+{}^{\downarrow}$, $L_-{}^{\uparrow}$, $L_-{}^{\downarrow}$, то и группа Пуанкаре состоит из четырех компонент связности $\mathcal{P}_+{}^{\uparrow}$, $\mathcal{P}_+{}^{\downarrow}$, $\mathcal{P}_-{}^{\uparrow}$, $\mathcal{P}_-{}^{\downarrow}$. При этом только множество $\mathcal{P}_+{}^{\uparrow}$ содержит единичный элемент $(I, 0)$, поэтому из четырех компонент связности только это множество является подгруппой группы Пуанкаре. Данная подгруппа называется собственной группой Пуанкаре.

Существует простая матричная реализация группы Пуанкаре. Каждому элементу (Λ, a) можно взаимно однозначно сопоставить 5×5 матрицу

$$\begin{pmatrix} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} & a^{\mu} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} \Lambda_2{}^\mu{}_\alpha & a_2^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1{}^\alpha{}_\nu & a_1^\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu & (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что в точности соответствует (29).

Рассмотрим еще бесконечно малое неоднородное преобразование Лоренца. Оно получается в случае когда $\Lambda = I + \omega$ где $\omega^\mu{}_\nu$ и a^μ - бесконечно малые величины. Тогда

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Данное преобразование задается в окрестности единичного элемента десятью независимыми вещественными параметрами. Поэтому группа Пуанкаре - это десяти параметрическая группа Ли.

6 Алгебра Ли группы Пуанкаре

Как мы уже отмечали, произвольное преобразование из группы Пуанкаре задается набором (Λ, a), где постоянная матрица с элементами $\Lambda^\mu{}_\nu$ удовлетворяет условию $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ и a^μ - произвольный постоянный вектор.Закон умножения в группе Пуанкаре имеет вид

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a)$$

Бесконечно малое преобразование из группы Пуанкаре характеризуется бесконечно малыми параметрами ω_ν^μ и a^μ, причем $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ и $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

Мы будем рассматривать унитарные представления группы Пуанкаре. Пусть $U(\Lambda, a)$ - оператор такого представления. Используя определение представления группы и закон умножения в группе Пуанкаре получим

$$U(\Lambda, a)U(\Lambda', a') = U((\Lambda, a)(\Lambda', a')) = U(\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a) \tag{31}$$

Рассмотрим очевидное соотношение $(I, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, a)$. Тогда

$$U(\Lambda, a) = U((I, a)(\Lambda, 0)) = U(I, a)U(\Lambda, 0) \tag{32}$$

Обозначим

$$U(\Lambda, 0) = U(\Lambda) \tag{33}$$

$$U(I, a) = U(a) \tag{34}$$

Тогда из (32) будем иметь

$$U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda) \tag{35}$$

Подставляя соотношение (35) в соотношение (31) получим

$$U(a)U(\Lambda)U(a')U(\Lambda') = U(a + \Lambda a')U(\Lambda\Lambda') \tag{36}$$

это есть основное соотношение, для ввода коммутационных соотношений в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Согласно (33), оператор $U(\Lambda)$ является представлением подгруппы элементов вида $(\Lambda, 0)$ в группе Пуанкаре, то есть представлением группы Лоренца преобразований $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$. В окрестности единичного элемента $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$, поэтому, учитывая связь представлений группы Ли с представлениями ее алгебры Ли, запишем

$$U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}} \tag{37}$$

Оператор $J_{\mu\nu}$ представляет собой генератор преобразований Лоренца, называемый также генератором Лоренцовских вращений. Поскольку $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, то $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$.

Согласно (34) оператор $U(a)$ является представлением подгруппы элементов вида (I, a) в группе Пуанкаре, то есть трансляций $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$. Учитывая связь представлений группы Ли с представлениями ее алгебры Ли, запишем

$$U(a) = e^{ia^{\mu}P_{\mu}} \tag{38}$$

Оператор P_{μ} представляет собой генератор трансляций.

Таким образом произвольное унитарное представление группы Пуанкаре дается оператором

$$U(\Lambda, a) = e^{ia^{\mu}P_{\mu}}e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}} \tag{39}$$

Этот оператор задается десятью параметрами a^μ, ω^μ как и должно быть для десятипараметрической группы Пуанкаре. Наша цель состоит в нахождении коммутационные соотношения для операторов P_μ , $J_{\mu\nu}$. Для этого мы будем использовать основное равенство (36).

<u>a.</u> Подставим в соотношении (36) $\Lambda = \Lambda' = I$, что соответствует $\omega_{\mu\nu} = \omega'_{\mu\nu} = 0$. В этом случае $U(\Lambda) = U(\Lambda') = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ - единичный оператор. Тогда (36) примет вид

$$U(a)U(a') = U(a + a') \tag{40}$$

учитывая явный вид $U(a)$ (38) запишем

$$e^{ia^\mu P_\mu} e^{ia'^\mu P_\mu} = e^{i(a^\mu + a'^\mu)P_\mu} \tag{41}$$

Пусть параметры a^μ и a'^μ является бесконечно малыми. Тогда во втором порядке из (41) будем иметь

$$(\mathbf{1} + ia^\mu P_\mu - \frac{1}{2}a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu)(\mathbf{1} + ia'^\mu P_\mu - \frac{1}{2}a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu) =$$

$$= \mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu)P_\mu - \frac{1}{2}(a^\mu + a'^\mu)(a^\nu + a'^\nu)P_\mu P_\nu$$

Или

$$\mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu)P_\mu - a^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu =$$

$$\mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu) - \frac{1}{2}a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}(a^\mu a'^\nu + a'^\mu a^\nu)P_\mu P_\nu$$

Отсюда

$$a^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu = \frac{1}{2}a^\mu a'^\nu (P_\mu P_\nu + P_\nu P_\mu)$$

Следовательно

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{42}$$

<u>b.</u> Положим в равенстве (36) $a^\mu = 0$, учтем, что $U(0) = \mathbf{1}$. Тогда это равенство примет вид

$$U(\Lambda)U(a')U(\Lambda') = U(\Lambda a')U(\Lambda\Lambda') \tag{43}$$

Положим $\Lambda' = \Lambda^{-1}$ и учтем, что согласно определению представления группы $U(\Lambda^{-1}) = U^{-1}(\Lambda)$. Тогда соотношение из (43) находим

$$U(\Lambda)U(a')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda a')$$

или

$$e^{ia'^{\mu}U(\Lambda)P_{\mu}U^{-1}(\Lambda)} = e^{i\Lambda^{\mu}{}_{\nu}a'^{\nu}P_{\mu}} = e^{ia'^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu}}$$

Отсюда

$$U(\Lambda)P_{\mu}U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu} \tag{44}$$

Обозначим $P'_{\mu} = U(\Lambda)P_{\mu}U^{-1}(\Lambda)$. Тогда из соотношения (44)

$$P'_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu}$$

То есть преобразование $P'_{\mu} = U(\Lambda)P_{\mu}U^{-1}(\Lambda)$ индуцирует преобразование генератора P_{μ} как ковариантного вектора относительно преобразований Лоренца.

Запишем бесконечно-малую форму соотношения (44)

$$(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma})P_{\mu}(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma}) = P_{\mu} + \omega^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu}$$

или

$$P_{\mu} + \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}[J_{\lambda\sigma}, P_{\mu}] = P_{\mu} + \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}(\eta_{\mu\sigma}P_{\lambda} - \eta_{\mu\lambda}P_{\sigma})$$

Отсюда следует

$$[P_{\mu}, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}P_{\lambda} - \eta_{\mu\lambda}P_{\sigma}) \tag{45}$$

c. Положим в равенстве (36) $a^{\mu} = a'^{\mu} = 0$. Тогда это равенство примет вид

$$U(\Lambda)U(\Lambda') = U(\Lambda\Lambda') \tag{46}$$

Отсюда

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U(\Lambda'') = U(\Lambda\Lambda')U(\Lambda'') = U(\Lambda\Lambda'\Lambda'') \tag{47}$$

Положим здесь $\Lambda'' = \Lambda^{-1}$. Следовательно

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}) \tag{48}$$

В левой части соотношения (48) имеем

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda)e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}U^{-1}(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}U(\Lambda)J_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)}$$

Рассмотрим теперь правую часть соотношения (48). Пусть $\Lambda'^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega'^{\mu}{}_{\nu}$. Тогда

$$(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\sigma} = \delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\omega'^{\mu}{}_{\tau}(\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\sigma} =$$
$$= \delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\omega'^{\mu\nu}\eta_{\nu\tau}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\kappa}\eta^{\kappa\tau} =$$
$$= \delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \frac{1}{2}\omega'^{\mu\nu}(\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} - \Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\mu})$$

Поэтому, если записать $(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\sigma} = \delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \omega''^{\lambda}\sigma$, то

$$\omega''^{\lambda}{}_{\sigma} = \frac{1}{2}\omega'^{\mu\nu}(\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} - \Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\mu})$$

Следовательно

$$U(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}) = e^{\frac{i}{2}\omega''^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma}} = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}J_{\lambda\sigma}} \tag{49}$$

В итоге имеем равенство

$$e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}U_(\Lambda)J_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)} = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}J_{\lambda\sigma}}$$

Отсюда

$$U(\Lambda)J_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}J_{\lambda\sigma} \tag{50}$$

То есть преобразование $J'_{\mu\nu} = U(\Lambda)J_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)$ индуцирует преобразование генератора $J_{\mu\nu}$ как ковариантного тензора относительно преобразований Лоренца.

Запишем бесконечно малую форму преобразований (48), полагая $\Lambda'^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega'^{\mu}{}_{\nu}$. Тогда имеем

$$(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma})J_{\mu\nu}(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma}) = (\delta^{\lambda}{}_{\mu} + \omega^{\lambda}{}_{\mu})(\delta^{\sigma}{}_{\nu} + \omega^{\sigma}{}_{\nu})J_{\lambda\sigma}$$

или

$$J_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\lambda\sigma}J_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}J_{\mu\nu}J_{\lambda\sigma} = J_{\mu\nu} + \omega^{\lambda}{}_{\mu}J_{\lambda\nu} + \omega^{\sigma}{}_{\nu}J_{\mu\sigma}$$

или

$$\frac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}[J_{\lambda\sigma}, J_{\mu\nu}] = \omega^{\lambda\sigma}\eta_{\sigma\mu}J_{\lambda\nu} + \omega^{\sigma\lambda}\eta_{\lambda\nu}J_{\mu\sigma} =$$
$$= \frac{1}{2}\omega^{\lambda\sigma}(\eta_{\sigma\mu}J_{\lambda\nu} + \eta_{\sigma\nu}J_{\mu\lambda} - \eta_{\lambda\mu}J_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu}J_{\mu\sigma})$$

Отсюда

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}) \tag{51}$$

Таким образом мы нашли все коммутационные соотношения между генераторами трансляций P_μ и генераторами лоренцевских вращений $J_{\mu\nu}$. Они даются соотношениями (42), (45), (51). Очевидно, что алгебра Ли группы трансляций есть частный случай алгебры Ли группы Пуанкаре. Соответствующие генераторы есть P_μ, их коммутационные соотношения даются равенством (42). Точно также, алгебра Ли группы Лоренца есть частный случай алгебры Ли группы Пуанкаре. Соответствующие генераторы есть $J_{\mu\nu}$, их коммутационные соотношения даются равенством (51).

7 Операторы Казимира для группы Пуанкаре.

Группа Пуанкаре имеет два оператора Казимира. Один из них является квадратичным и строится из генераторов трансляций

$$C_1 = P^\mu P_\mu. \tag{52}$$

Покажем, что оператор C_1 коммутирует со всеми генераторами группы Пуанкаре. Соотношение

$$[C_1, P_\mu] = 0 \tag{53}$$

является очевидным следствием коммутационных соотношений (42). Рассмотрим

$$[C_1, J_{\lambda\sigma}] = P^\mu[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] + [P_\mu, J_{\lambda\sigma}]P^\mu =$$
$$= i(\eta_{\mu\sigma}P^\mu P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P^\mu P_\sigma + \eta_{\mu\sigma}P_\lambda P^\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\sigma P^{\mu)} =$$
$$= i(P_\sigma P_\lambda - P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma - P_\sigma P_\lambda) = 0 \tag{54}$$

Здесь мы использовали коммутационные соотношения (45). Итак, оператор C_1 (52) - это оператор Казимира.

Второй оператор Казимира строится несколько сложнее. Введем оператор

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\nu J^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}J^{\lambda\sigma}P^\nu, \tag{55}$$

который называется вектором Паули - Любаньского. Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ - абсолютно антисимметричный единичный тензор. Отметим полезные свойства оператора (55)

a.

$$P^\mu W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\mu P^\nu J^{\lambda\sigma} = 0 \tag{56}$$

b.

$$\begin{aligned}
[P^\mu, W_\nu] &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma}[P^\mu, P^\rho J^{\lambda\sigma}] = \\
= \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma}P^\rho[P^\mu, J^{\lambda\sigma}] &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma}P^\rho(\eta^{\mu\sigma}P^\lambda - \eta^{\mu\lambda}P^\sigma) = \\
&= i\varepsilon_{\nu\rho\lambda}{}^{\mu}P^\rho P^\lambda = 0
\end{aligned} \tag{57}$$

c.

$$\begin{aligned}
&[J_{\mu\nu}, W_\tau] = \frac{1}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}[J_{\mu\nu}, P_\rho J_{\lambda\sigma}] = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}([J_{\mu\nu}, P_\rho]J_{\lambda\sigma} + P_\rho[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]) = \\
&= \frac{i}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}(-\eta_{\rho\nu}P_\mu J_{\lambda\sigma} + \eta_{\rho\mu}P_\nu J_{\lambda\sigma} + \\
&+\eta_{\mu\lambda}P_\rho J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}P_\rho J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}P_\rho J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}P_\rho J_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{i}{2}(-\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}P_\mu J_{\lambda\sigma} + \varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}P_\nu J_{\lambda\sigma} - \\
&-2\varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}P_\lambda J_{\nu\sigma} + 2\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}P_\lambda J_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{i}{2}(\varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}(P_\nu J_{\lambda\sigma} - 2P_\lambda J_{\nu\sigma}) - \\
&-\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}(P_\mu J_{\lambda\sigma} - 2P_\lambda J_{\mu\sigma})) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2}(\varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}(P_\nu J_{\lambda\sigma} - P_\lambda J_{\nu\sigma} + P_\sigma J_{\nu\lambda}) -$$
$$-\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}(P_\mu J_{\lambda\sigma} - P_\lambda J_{\mu\sigma} + P_\sigma J_{\mu\lambda})) =$$
$$= \frac{i}{2}(\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma}\eta_{\nu\rho} - \varepsilon_{\tau\mu\rho\sigma}\eta_{\nu\lambda} - \varepsilon_{\tau\mu\lambda\rho}\eta_{\nu\sigma} -$$
$$-\varepsilon_{\tau\nu\lambda\sigma}\eta_{\mu\rho} + \varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}\eta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\tau\nu\lambda\rho}\eta_{\mu\sigma})P^{[\rho}J^{\lambda\sigma]} \tag{58}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по соответствующим индексам.

Рассмотрим определение вектора Паули - Любаньского W_ω (55). Отсюда получим

$$W_\omega \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa}P^{[\mu}J^{\nu\kappa]} =$$
$$= -\frac{1}{2}(\delta^\rho_\omega\delta^\lambda_\nu\delta^\sigma_\kappa - \delta^\rho_\omega\delta^\lambda_\kappa\delta^\sigma_\nu - \delta^\lambda_\omega\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\kappa +$$
$$+\delta^\lambda_\omega\delta^\rho_\kappa\delta^\sigma_\nu + \delta^\sigma_\omega\delta^\rho_\nu\delta^\lambda_\kappa - \delta^\sigma_\omega\delta^\rho_\kappa\delta^\lambda_\nu)P^{[\mu}J^{\nu\kappa]} =$$
$$= -3P^{[\rho}J^{\lambda\sigma]} \tag{59}$$

Здесь мы использовали тождество

$$\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa} = -det\begin{pmatrix} \delta^\rho_\mu & \delta^\rho_\nu & \delta^\rho_\kappa \\ \delta^\lambda_\mu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\lambda_\kappa \\ \delta^\sigma_\mu & \delta^\sigma_\nu & \delta^\sigma_\kappa \end{pmatrix} \tag{60}$$

Следовательно

$$P^{[\rho}J^{\lambda\sigma]} = -\frac{1}{3}W_\omega\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} \tag{61}$$

Подставим соотношение (61) в соотношение (58), получим

$$[J_{\mu\nu}, W_\tau] = -\frac{i}{6}\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}(\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma}\eta_{\nu\rho} - \varepsilon_{\tau\mu\rho\sigma}\eta_{\nu\lambda}$$
$$-\varepsilon_{\tau\mu\lambda\rho}\eta_{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu))W_\omega \tag{62}$$

Рассмотрим тождество (60) из которого следует

$$\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma} = -2det\begin{pmatrix} \delta^\omega_\tau & \delta^\omega_\mu \\ \delta^\rho_\tau & \delta^\rho_\mu \end{pmatrix} \tag{63}$$

Учитывая тождество в соотношении (62) будем иметь

$$[J_{\mu\nu}, W_\tau] = \frac{i}{3}3(\eta_{\nu\rho}(\delta^\omega_\tau\delta^\rho_\mu - \delta^\omega_\mu\delta^\rho_\tau) - \eta_{\mu\rho}(\delta^\omega_\tau\delta^\rho_\nu - \delta^\omega_\nu\delta^\rho_\tau))W_\omega =$$
$$= i(\eta_{\mu\nu}W_\tau - \eta_{\nu\tau}W_\mu - \eta_{\mu\nu}W_\tau + \eta_{\mu\tau}W_\nu)$$

То есть

$$[J_{\mu\nu}, W_\tau] = i(\eta_{\mu\tau}W_\nu - \eta_{\nu\tau}W_\mu) \tag{64}$$

d.

$$[W_\mu, W_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}[W_\mu, P^\lambda J^{\rho\sigma}] =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}P^\lambda[W_\mu, J^{\rho\sigma}] =$$
$$= -\frac{i}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}P^\lambda(\delta^\rho_\mu W^\sigma - \delta^\sigma_\mu W^\rho) = -i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\lambda W^\sigma$$

Покажем теперь, используя полученные тождества , что оператор

$$C_2 = W^\mu W_\mu \tag{65}$$

это оператор Казимира. Для этого надо доказать тождества $[C_2, P_\mu] = 0$ и $[C_2, J_{\mu\nu}] = 0$. Первое из этих тождеств есть тривиальное следствие соотношения (57). Рассмотрим

$$[C_2, J_{\mu\nu}] = [W^\tau W_\tau, J_{\mu\nu}] = W^\tau[W_\tau, J_{\mu\nu}] + [W_\tau, J_{\mu\nu}]W^\tau =$$
$$= -i(\eta_{\mu\tau}W^\tau W_\nu - \eta_{\nu\tau}W^\tau W_\mu + \eta_{\mu\tau}W_\nu W^\tau - \eta_{\nu\tau}W_\mu W^\tau) =$$
$$= -i(W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu + W_\nu W_\mu - W_\mu W_\nu) = 0 \tag{66}$$

Таким образом оператор C_2 (65) является оператором Казимира.

8 Неприводимое представление собственной группы Лоренца

8.1 Тензорное представление

Начнем с хорошо известных понятий. Рассмотрим множество системы координат, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

где матрица Λ удовлетворяет условию $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Будем называть такие системы координат допустимыми.

Пусть в некоторой допустимой системе координат (x^μ) задан набор 4^{m+n} чисел $t^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ и пусть в любой другой допустимой системе координат (x'^μ) задан набор 4^{m+n} чисел $t'^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$. Если эти наборы связаны друг с другом следующим образом

$$t'^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x'^{\alpha_m}} \; \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} \; t^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n}, \tag{67}$$

то говорят, что задан тензор ранга $m+n$. Числа $t^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ называются компонентами тензора в системе координат (x^μ). Верхние индексы называются контравариантными, нижние ковариантными.

Соотношение (67) определяет тензор в фиксированной точке пространства Минковского. Тензор, заданный в каждой точке пространства Минковского или в какой-нибудь его области называется тензорным полем.

Поскольку в пространстве Минковского задана метрика $\eta_{\mu\nu}$, позволяющая поднимать и опускать индексы, то в принципе можно не различать контравариантные и ковариантные индексам и говорить просто о тензоре ранга $m+n$. Однако, конечно при проведении конкретных вычислений необходимо следить за положением индексов.

Тензор нулевого ранга называется скаляром. В этом случае определяющее соотношение (67) выглядит так:

$$\varphi'(\Lambda x) = \varphi(x) \tag{68}$$

Тензор с компонентами $t^\mu(x)$ называется контравариантным вектором. Определяющее соотношение (67) имеет в этом случае вид

$$t'^\mu(\Lambda x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} t^\nu(x).$$

Но $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$. Поэтому получаем

$$t'^\mu(\Lambda x) = \Lambda^\mu{}_\nu t^\nu(x)\,. \tag{69}$$

Тензор с компонентами t_μ называется ковариантным вектором. Определяющее соотношение (67) в этом случае есть

$$t'_\mu(\Lambda x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, t_\nu(x)\,.$$

Найдем $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\nu} = \delta^\alpha_\nu,$$

Отсюда

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\alpha{}_\nu.$$

Или

$$\underbrace{(\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\mu}_{\delta^\rho_\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha \delta^\alpha_\nu$$

Поэтому

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = (\Lambda^{-1})^T{}_\nu{}^\rho$$

Следовательно закон преобразования компонент ковариантного вектора записывается в виде

$$t'_\mu(\Lambda x) = (\Lambda^{-1})^T{}_\mu{}^\nu t_\nu(x) \tag{70}$$

Как мы уже отмечали, метрика $\eta_{\mu\nu}$ позволяет поднимать и опускать индексы. То есть если заданы контравариантные компоненты t^μ, то им можно сопоставить ковариантные компоненты $t_\mu = \eta_{\mu\nu} t^\nu$ и наоборот, если заданы ковариантные компоненты t_μ, то им можно сопоставить ковариантные компоненты $t^\mu = \eta^{\mu\nu} t_\nu$.

В общем случае тензора ранга $m+n$ соотношения (67) принимает вид

$$\begin{aligned} &t'^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}(\Lambda x) = \\ &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\ldots\Lambda^{\mu_m}{}_{\alpha_m}\, (\Lambda^{-1})^T{}_{\nu_1}{}^{\beta_1}\ldots(\Lambda^{-1})^T{}_{\nu_n}{}^{\beta_n}\; t^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n}(x) \end{aligned} \tag{71}$$

Соотношение (71) можно интерпретировать следующим образом. Каждому допустимому преобразованию координат $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, то если каждой матрице Λ, осуществляющей преобразование Лоренца, однозначно сопоставляется матрица

$$R^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(\Lambda) = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}{}_{\alpha_m} \quad (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu_1}{}^{\beta_1} \dots (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu_n}{}^{\beta_n}, \tag{72}$$

действующая в линейном пространстве тензорных полей ранга $m + n$. Это означает, что определено отображение

$$\Lambda \longrightarrow \underbrace{\Lambda \otimes \Lambda \otimes \cdots \otimes \Lambda}_{m} \otimes \underbrace{(\Lambda^{-1})^{T} \otimes \cdots \otimes (\Lambda^{-1})^{T}}_{n} \tag{73}$$

Символ $\otimes$ означает прямое произведение матриц. То есть, если матрица Λ действует в линейном пространстве векторов по правилу $t'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} t^{\nu}$, то матрица $\Lambda \otimes \Lambda$ действует в линейном пространстве тензоров второго ранга с компонентами $t^{\mu_1 \mu_2}$ по правилу $t'^{\mu_1 \mu_2} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} t^{\mu\nu}$. Матрица $(\Lambda^{-1})^{T} \otimes (\Lambda^{-1})^{T}$ действует в линейном пространстве тензоров второго ранга с компонентами $t_{\mu\nu}$ по правилу $t'_{\mu_1 \mu_2} = (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu_1}{}^{\nu_1} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu_2}{}^{\nu_2} t_{\nu_1 \nu_2}$

Не трудно проверить, что соотношение (71) или, что тоже самое, соотношение (73), задает гомоморфизм группы Лоренца в группу операторов в линейном пространстве тензоров ранга $m + n$ с компонентами $t^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$. Другими словами, соотношение (71) задает представление группы Лоренца, которое называется тензорным представлением.

Построенное тензорное представление в общем случае приводимо. Пространство неприводимого представления строится с помощью операций симметризации, антисимметризации и взятия следа. Мы позднее рассмотрим явную конструкцию, а пока разберем один пример.

Пусть $t^{\mu_1 \mu_2}$ компоненты тензора второго ранга. Тогда

$$t^{\mu_1 \mu_2} = t^{(\mu_1 \mu_2)} + t^{[\mu_1 \mu_2]} \tag{74}$$

где

$$t^{(\mu_1 \mu_2)} = \frac{1}{2}(t^{\mu_1 \mu_2} + t^{\mu_2 \mu_1}) \tag{75}$$
$$t^{[\mu_1 \mu_2]} = \frac{1}{2}(t^{\mu_1 \mu_2} - t^{\mu_2 \mu_1})$$

При этом

$$t^{(\mu_1\mu_2)} = t^{(\mu_1\mu_2)} \qquad (76)$$
$$t^{[\mu_1\mu_2]} = -t^{[\mu_1\mu_2]}$$

Компоненты $t^{(\mu_1\mu_2)}$ определяют симметричный тензор второго ранга, а компоненты $t^{[\mu_1\mu_2]}$ определяют антисимметричный.

Обозначим след рассматриваемого тензора как

$$t = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{\mu_1\mu_2}$$

тогда

$$t^{\mu_1\mu_2} = \tilde{t}^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{4}\eta^{\mu_1\mu_2} t \qquad (77)$$

где $\tilde{t}^{\mu_1\mu_2}$ - компоненты бесследового тензора, $\eta_{\mu_1\mu_2}\tilde{t}^{\mu_1\mu_2} = 0$. Ясно, что

$$\tilde{t}^{\mu_1\mu_2} = t^{\mu_1\mu_2} - \frac{1}{4}\eta^{\mu_1\mu_2} t$$

Поскольку $\eta_{\mu_1\mu_2} t^{[\mu_1\mu_2]} = 0$, то $t = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{\mu_1\mu_2} = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{(\mu_1\mu_2)}$. Таким образом для произвольного тензора второго ранга имеем разложение

$$t^{\mu_1\mu_2} = \tilde{t}^{\mu_1\mu_2} + t^{[\mu_1\mu_2]} + \frac{1}{4}\eta^{\mu_1\mu_2}\, t.$$

При этом компоненты $\tilde{t}^{(\mu_1\mu_2)}$, $\tilde{t}^{[\mu_1\mu_2]}$, t преобразуются относительно преобразований Лоренца независимо друг от друга и определяют три подпространства неприводимого представления: симметричное бесследовое представление, антисимметричное представление и скалярное представление.

Очевидно, что подобное рассмотрение можно проверить для тензора произвольного ранга, однако более удобно это делать в других терминах.

Найдем явный вид генераторов группы Лоренца в скалярном и векторном представлениях. Рассмотрим бесконечно малую форму преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\ \omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Из соотношения (68) имеем

$$\varphi'(x+\omega x) = \varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x) + \partial_\mu \varphi(x) \omega^\mu{}_\nu x^\nu = \varphi(x)$$

Обозначим $\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\delta\varphi(x) &= -\partial_\mu \varphi \omega^\mu{}_\nu x^\nu = \\
&= -\omega^{\alpha\beta}(\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha \varphi) = \\
&= -\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\nu} x^\nu \partial_\beta \varphi) = \\
&= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}\varphi
\end{aligned} \tag{78}$$

где

$$J_{\alpha\beta} = i(\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha - \eta_{\alpha\nu} x^\nu \partial_\beta) \tag{79}$$

Оператор $J_{\alpha\beta}$ (79) называется генератором преобразований Лоренца в скалярном представлении. Непосредственными вычислениями можно показать, что оператор $J_{\alpha\beta}$ (79) удовлетворяет коммутационным соотношениям (51).

Обратимся теперь к соотношению (69). Имеем

$$t'^\mu(x+\omega x) = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) t^\nu(x)$$

или

$$t'^\mu(x) + \partial_\nu t^\mu \omega^\nu{}_\rho x^\rho = t^\mu(x) + \omega^\mu{}_\nu t^\nu(x)$$

Обозначим $\delta t^\mu(x) = t'^\mu(x) - t^\mu(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\delta t^\mu(x) &= -\partial_\nu t^\mu \omega^\mu{}_\rho x^\rho + \omega^\mu{}_\nu t^\nu = \\
&= \omega^{\alpha\beta}\delta^\mu{}_\alpha \eta_{\beta\nu} t^\nu - \omega^{\alpha\beta}\partial_\alpha t^\mu \eta_{\beta\nu} x^\nu = \\
&= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}[i(\eta_{\beta\lambda} x^\lambda \partial_\alpha - \eta_{\alpha\lambda} x^\lambda \partial_\beta)\delta^\mu{}_\nu t^\nu - \\
&- i(\delta^\mu{}_\alpha \eta_{\beta\nu} - \delta^\mu{}_\beta \eta_{\alpha\nu}) t^\nu] = \\
&= \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu t^\nu
\end{aligned} \tag{80}$$

где

$$
\begin{aligned}
(J_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} &= (L_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} + (S_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \\
(L_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} &= i\delta^{\mu}{}_{\nu}(\eta_{\beta\lambda}x^{\lambda}\partial_{\alpha} - \eta_{\alpha\lambda}x^{\lambda}\partial_{\beta}) \\
(S_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} &= i(\delta^{\mu}{}_{\beta}\eta_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}{}_{\alpha}\eta_{\beta\nu})
\end{aligned}
\qquad (81)
$$

Оператор $(J_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$ (81) называется генератором преобразований Лоренца в контравариантном векторном представлении. Непосредственным вычислением можно проверить, что оператор $(J_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$ (81) удовлетворяет коммутационным соотношениям (51).

Аналогичные рассуждения позволяют найти в явном виде генераторы преобразований Лоренца в любом тензорном представлении. Далее мы покажем, что по мимо тензорного представления группа Лоренца обладает и другими представлениями более общего вида.

8.2 Собственная группа Лоренца и группа $SL(2|\mathbb{C})$

Рассмотрим группу 2×2 матриц N с комплексными элементами и определителем равным единице. Эта группа обозначается $SL(2|\mathbb{C})$. Мы покажем, что эта группа тесно связана с собственной группой Лоренца $L_{+}{}^{\uparrow}$. Более точно , мы покажем, что каждой матрице $N \in SL(2|\mathbb{C})$ соответствует единственная матрица $\Lambda \in L_{+}{}^{\uparrow}$ причем

$$
\begin{aligned}
\Lambda(N_1N_2) &= \Lambda(N_1)\Lambda(N_2) \\
\Lambda(E) &= I
\end{aligned}
\qquad (82)
$$

Здесь E - единичная матрица 2×2. Соотношение (82) означает, что группа $L_{+}{}^{\uparrow}$ есть представление группы $SL(2|\mathbb{C})$. Кроме того оказывается, что если $\Lambda(N_1) = \Lambda(N_2)$, то $N_1 = \pm N_2$, то есть рассматриваемое представление является двузначным. Конструкция матриц Λ с указанными выше свойствами состоит из нескольких шагов:

<u>a.</u> Рассмотрим линейное пространство эрмитовых 2×2 матриц X, $X^{+} = X$ $(X^{+} = (X)^{*})^{T}$. В этом пространстве можно выбрать базис вида $\sigma_{\mu} = (\sigma_0, \sigma_i)$ где

$$
\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (83)
$$

Матрицы $\sigma_i, \quad i = 1, 2, 3$ называются матрицами Паули. Очевидно, что все матрицы σ_μ эрмитовы.

Матрицы (83) обладают полезными свойствами, которые устанавливаются прямой проверкой.

$$\begin{aligned} {\sigma_\mu}^2 &= \sigma_0 \\ \sigma_0\sigma_\mu &= \sigma_\mu\sigma_0 = \sigma_\mu \\ \sigma_i\sigma_j &= \sigma_0\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ tr\sigma_0 &= 2, \\ tr\sigma_i &= 0 \\ tr\sigma_\mu\sigma_\nu &= 2\delta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{84}$$

Здесь ε_{ijk} - полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Введем такие матрицы

$$\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i) \tag{85}$$

тогда

$$tr\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu = 2\eta_{\mu\nu} \tag{86}$$

Пусть X - произвольная эрмитова 2×2 матрица, которая в базисе (83) записывается в виде

$$X = x^\mu\sigma_\mu \tag{87}$$

где x^μ - вещественные числа (в силу эрмитовости X и σ_μ), которые можно ассоциировать с координатами событий в пространстве Минковского. Из соотношений (86), (87) следует, что

$$x^\mu = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^\mu X \tag{88}$$

<u>b.</u> Пусть $N \in SL(2|\mathbb{C})$, рассмотрим преобразование матриц X вида

$$X' = NXN^+ \tag{89}$$

Отсюда $X'^{+} = NX^{+}N^{+} = NXN^{+} = X'$. То есть X' (89) - эрмитова матрица. При этом

$$detX' = det\ NXN^{+} = detN\ detX\ detN^{+} = detX \tag{90}$$

Матрицы X и X' можно разложить по базису (83)

$$X = x^{\nu}\sigma_{\nu}, \quad X' = x'^{\mu}\sigma_{\mu} \tag{91}$$

Тогда

$$x'^{\mu} = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^{\mu}X' = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^{\mu}Nx^{\nu}\sigma_{\nu}N^{+} = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^{\mu}N\sigma_{\nu}N^{+}x^{\nu}$$

Обозначим

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N) = \frac{1}{2}tr(\tilde{\sigma}^{\mu}N\sigma_{\nu}N^{+}) \tag{92}$$

Тогда

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)x^{\nu} \tag{93}$$

Это соотношение выглядит как преобразование Лоренца, но чтобы сделать это заключение надо проверить, что матрицы (92) удовлетворяют базовому соотношению $\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$.

c. Запишем элементы матриц (91) в явном виде. Используя выражения для матриц σ_{μ} (83) получим

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Отсюда

$$detX = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} \tag{95}$$

Матрица X' получается из матрицы X (94) заменой x^{μ} на x'^{μ}. Поэтому

$$detX' = \eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} \tag{96}$$

Но согласно (90) $detX' = detX$ и значит

$$\eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} \tag{97}$$

d. Подставляя соотношение (93) в (97), получим

$$\Lambda^T(N)\eta\Lambda(N) = \eta \tag{98}$$

Это значит, что матрица $\Lambda(N)$, определенная соотношением (92), осуществляет преобразование Лоренца и значит принадлежит группе Лоренца. Это согласуется с тем, что коэффициенты разложения матрицы X по базису σ_μ имеют смысл координат в пространстве Минковского. Можно показать, что $det\Lambda(N) = 1$. Кроме того, $\Lambda^0{}_0(N) = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^0 N\sigma_0 N^+ = \frac{1}{2}trN_0N^+ > 0$ Следовательно матрицы $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$ (92) принадлежат собственной группе Лоренца, $\Lambda(N) \in L_+{}^\uparrow$.

e. Рассмотрим соотношение $\Lambda(N_1) = \Lambda(N_2)$. Или, согласно (92)

$$tr\tilde{\sigma}^\mu N_1\sigma_\nu N_1{}^+ = tr\tilde{\sigma}^\mu N_2\sigma_\nu N_1{}^+$$

Отсюда $N_1 = \pm N_2$. Данной матрице $\Lambda(N)$ соответствуют две матрицы $N \in SL(2|\mathbb{C})$.

Рассмотрим два последних преобразования (89)

$$\begin{aligned} X' &= N_1XN_1{}^+ \\ X'' &= N_2X'N_2{}^+ \end{aligned} \tag{99}$$

Им соответствует преобразование

$$X'' = (N_2N_1)X'(N_2N_1)^+ \tag{100}$$

С другой стороны, пусть $X = x^\mu\sigma_\mu$, $X' = x'^\mu\sigma_\mu$ и $X'' >= x''^\mu\sigma_\mu$. Тогда из (99) получим

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= \Lambda^\alpha\nu(N_1)x^\nu \\ x''^\mu &= \Lambda^\mu\alpha(N_2)x'^\alpha \end{aligned}$$

и значит

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha(N_2)\Lambda^\alpha{}_\nu(N_1)x^\nu \tag{101}$$

Но из (100)

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(N_2N_1)x^\nu \tag{102}$$

Поэтому

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_2N_1) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(N_2)\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}(N_1) \tag{103}$$

Таким образом произведению матриц N соответствует произведение матриц $\Lambda(N)$

Пусть E - единичная 2×2 матрица. Тогда $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(E) = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^{\mu}E\sigma_{\nu}E = \frac{1}{2}tr\tilde{\sigma}^{\mu}\sigma_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$. То есть единичной матрице из $SL(2|\mathbb{C})$ отвечает единичный элемент собственной группы Лоренца. В итоге мы видим, что множество матриц $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)$ (92) есть подгруппа собственной группы Лоренца. Покажем, что эта группа совпадает с $L_+{}^{\uparrow}$. Для этого надо посчитать число независимых параметров в группе матриц $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)$. Каждая комплексная 2×2 матрица N имеет четыре комплексных элемента, то есть задается восемью действительными параметрами. Условие $detN = 1$ означает два действительных условия $Re\ det\ N = 1$, $Im\ det\ N = 0$. Поэтому матрица N задается шестью действительными числами и значит соответствующая матрица $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)$ (92) зависит от шести действительных параметров. Ранее мы показали, что каждая матрица из группы $L_+{}^{\uparrow}$ параметризуется шестью действительными параметрами. Поэтому группа матриц $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)$ (92) совпадает с $L_+{}^{\uparrow}$. В результате мы построили гомоморфизм

$$\begin{array}{rcl}
\Lambda: \quad SL(2|\mathbb{C}) & \longrightarrow & L_+{}^{\uparrow} \\
N \in L_+{}^{\uparrow} & \longrightarrow & \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \in L_+{}^{\uparrow} \\
N_1N_2 \in SL(2|\mathbb{C}) & \longrightarrow & \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_1N_2) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(N_1)\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}(N_2) \in L_+{}^{\uparrow}
\end{array}$$

Мы видим, что собственная группа Лоренца непосредственно связана с группой $SL(2|\mathbb{C})$ и поэтому изучение группы $SL(2|\mathbb{C})$ позволяет более глубоко понять свойства группы Лоренца.

8.3 Спиноры

Матрицы N действуют в двумерном комплексном линейном пространстве. Элементами этого пространства является двухкомпонентные векторы $\psi \equiv \{\psi_a\}; \quad a = 1, 2$. Матрицы N осуществляют преобразования этих векторов по правилу

$$\psi'_a = N_a{}^b \psi_b \tag{104}$$

Так как каждому преобразованию Лоренца Λ соответствует некоторая матрица N, то можно сказать, что соотношение (104) это преобразование двухкомпанентного комплексного вектора при преобразованиях Лоренца. Векторы $\psi = \{\psi_a\}$, преобразующееся согласно (104) называются левыми или левосторонними вейлевскими спинорами. Индексы $a, b = 1, 2$ называются спинорными.

Введем матрицу $\varepsilon = (\varepsilon_{ab})$ с компонентами

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{105}$$

Рассмотрим выражение

$$f_{ab} = N_a{}^c N_b{}^d \varepsilon_{cd} = N_a{}^1 N_b{}^2 \varepsilon_{12} + N_a{}^2 N_b{}^1 \varepsilon_{21} = N_a{}^2 N_b{}^1 - N_a{}^1 N_b{}^2$$

Очевидно, что $f_{11} = f_{22} = 0$ и $f_{21} = -f_{12}$. Найдем f_{12}, имеем $f_{12} = N_1{}^2 N_2{}^1 - N_1{}^1 N_2{}^2 = -detN = -1$. То есть $f_{12} = -1$. Следовательно $f_{ab} = \varepsilon_{ab}$. Таким образом

$$\varepsilon_{ab} = N_a{}^c N_b{}^d \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{ab} \tag{106}$$

или

$$N \varepsilon N^T = \varepsilon \tag{107}$$

Это соотношение показывает, что матрица ε является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Введем обратную матрицу ε^{-1} с элементами ε^{ab}. По определению $\varepsilon^{ac}\varepsilon_{cb} = \delta^a{}_b$, $\varepsilon_{ac}\varepsilon^{cb} = \delta_a{}^b$. Не трудно увидеть, что

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

Из (107) получаем

$$\varepsilon^{-1} = N^T \varepsilon^{-1} N \tag{109}$$

То есть ε^{-1} также является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Матрицы ε_{ab}, ε^{ab} используются для опускания и поднимания спинорных индексов

$$\psi^a = \varepsilon^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b \tag{110}$$

Покажем, что выражение ${\psi_1}^a{\psi_2}_a$ является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$ и значит собственной группе Лоренца. Действительно

$$\begin{gathered}{\psi'_1}^a{\psi'_2}_a = \varepsilon^{ab}\psi'_{1b}{\psi'_2}_a = \varepsilon^{ab}{N_b}^d\psi_{1d}{N_a}^c\psi_{2c} = \\ {(N^T)^c}_a\varepsilon^{ab}{N_b}^d\psi_{1d}\psi_{2c} = \varepsilon^{cd}\psi_{1d}\psi_{2c} = \psi_1^a\psi_{2a}\end{gathered}$$

В результате мы получаем правило построения лоренц-инвариантов из двухкомпонентных спиноров.

Пусть N - произвольная матрица $SL(2|\mathbb{C})$. Ей соответствует единственная матрица N^* с комплексно сопряженными элементами, которые обозначаются как ${(N^*)_{\dot{a}}}^{\dot{b}}$; $\dot{a}, \dot{b} = \dot{1}, \dot{2}$. При этом $detN^* = (detN)^* = 1$. Матрица N^* действует в двухмерном комплексном линейном пространстве с векторами $\varphi = \{\varphi_{\dot{a}}\}$ по правилу

$$\varphi'_{\dot{a}} = {(N^*)_{\dot{a}}}^{\dot{b}}\varphi_{\dot{a}} \tag{111}$$

Векторы $\varphi = \{\varphi_{\dot{a}}\}$, преобразующиеся согласно (111), называются правыми или правосторонними вейлевскими спинорами. Индексы $\dot{a}$, $\dot{b}$ называются спинорными. Соотношение (111) можно трактовать как закон преобразования компонент правостороннего спинора при преобразованиях Лоренца.

Определим матрицы

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= (\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}), & \tilde{\varepsilon}^{-1} &= (\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}) \\ \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{112}$$

Можно показать, что эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= N^{*\dot{c}}_{\dot{a}}{N^*}_{\dot{b}}^{\ \dot{d}}\varepsilon_{\dot{c}\dot{d}} \\ \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= N^{*\dot{a}}_{\dot{c}}{N^*}_{\dot{d}}^{\ \dot{b}}\varepsilon^{\dot{c}\dot{d}}\end{aligned} \tag{113}$$

Это означает, что матрицы $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ являются инвариантами группы $SL(2|\mathbb{C})$ и их можно использовать для поднятия и опускания индексов $\dot{a}, \dot{b}$. То есть

$$\varphi^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\varphi_{\dot{b}}, \qquad \varphi_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\varphi^{\dot{b}} \tag{114}$$

При этом можно показать, что

$$\varphi'_{1\dot{a}}{\varphi'_2}^{\dot{a}} = \varphi_{1\dot{a}}{\varphi_2}^{\dot{a}} \tag{115}$$

Здесь $\varphi'_{1\dot{a}}$ дается соотношением (111). Соотношение (115) показывает, что выражение $\varphi_{1\dot{a}}{\varphi_2}^{\dot{a}}$ является лоренц-инвариантом.

Обычно спинорные индексы $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, ...$ называются точечными, а индексы $a, b, c...$ неточечными.

Пусть x^μ - координата события в пространстве Минковского, введем матрицы $X = x^\mu\sigma_\mu$. Ранее было показано, что $X' = NXN^+$, $X' = x'^\mu\sigma_\mu$, и $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(N)x^\nu$ (см. формулы (87),(89) и (93)). Тогда имеем

$$\Lambda^\mu{}_\nu(N)x^\nu\,\sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+\,x^\nu$$

Отсюда в силу произвольности x^μ получим

$$\Lambda^\mu{}_\nu(N)\sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+$$

или

$$\Lambda^T(N)_\nu{}^\mu\sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+$$

или

$$\sigma_\mu = (\Lambda^T(N)^{-1})_\mu{}^\nu N\sigma_\nu N^+ \tag{116}$$

Это соотношение показывает, что матрицы σ_μ образует инвариантный матричный вектор.

Обозначим элемент матрицы σ_μ как $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$. Поднимая спинорные индексы получим

$$(\sigma_\mu)^{a\dot{a}} = \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\sigma_\mu)_{b\dot{b}} \equiv (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} \tag{117}$$

Прямые вычисления показывают, что $\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i)$, то есть матрицы (117) совпадают с матрицами (90), введенные ранее. Матрицы σ_μ, $\tilde{\sigma}_\mu$ обладают большим количеством полезных свойств, из которых мы отметим следующие

$$\begin{aligned}(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu)_a{}^b &= 2\eta_{\mu\nu}\delta_a{}^b\,,\\ (\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} &= 2\eta_{\mu\nu}\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\,,\\ tr\,\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu &= 2\eta_{\mu\nu}\\ \sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\tilde{\sigma}_\mu{}^{b\dot{b}} &= 2\delta_a{}^b\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\,. \end{aligned} \tag{118}$$

Соотношения (118) проверяются прямыми вычислениями.

Мы видим, что с группой Лоренца связаны следующие инвариантные объекты $\eta_{\mu\nu}\,, \eta^{\mu\nu}\,, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,, \varepsilon_{ab}\,, \varepsilon^{ab}\,, \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\,, (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\,, (\sigma^\mu)^{\dot{a}a}$, которые используются при рассмотрении различных аспектов релятивистской симметрии в теории поля.

8.4 Пространство неприводимого представления группы $SL(2|\mathbb{C})$

Мы задали группу $SL(2|\mathbb{C})$ как группу 2×2 комплексных матриц с определителем равным единице, действующих в двумерном комплексном пространстве по правилу $\psi'_a = N_a{}^b\psi_b$. Произведению матриц N_1N_2 отвечает преобразование $\psi'_a = N_a{}^bN_b{}^c\psi_c$. В результате мы имеем представление группы $SL(2|\mathbb{C})$, называемое фундаментальным. Соотношения $N \to N^*\,, \varphi'_{\dot{a}} = (N^*)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\varphi_{\dot{b}}$ задают другое представление, называемое сопряженным.

Пусть $N \in SL(2|\mathbb{C})$, сопоставим этой матрице матрицу, действующую в $2(n+m)$ мерном комплексном пространстве, по правилу

$$N_a{}^b \to N_{a_1}{}^{b_1}N_{a_2}{}^{b_2}\ldots N_{a_n}{}^{b_n}(N^*)_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1}\ldots(N^*)_{\dot{a}_m}{}^{\dot{b}_m}\,. \tag{119}$$

Вектор такого линейного пространства обозначим $\psi_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m}$. Закон преобразования этих векторов записывается в виде

$$\psi'_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m} = N_{a_1}{}^{b_1}N_{a_2}{}^{b_2}\ldots N_{a_n}{}^{b_n}(N^*)_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1}\ldots(N^*)_{\dot{a}_m}{}^{\dot{b}_m}\psi_{b_1\ldots b_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m}\,. \tag{120}$$

Вектор $\psi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}$, преобразующийся согласно (120) называется спин-тензором неточечного ранга n и точечного ранга m. Соотношения (119) и (120) задают представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ в пространстве спин-тензоров.

Представление, определенное выше, в общем случае приводимо. Построение пространства неприводимого представления начнем с простых примеров. Рассмотрим спин-тензор вида $\psi_{a_1 a_2}$ и запишем его в виде суммы симметричной и антисимметричной частей.

$$\psi_{a_1 a_2} = \psi_{(a_1 a_2)} + \psi_{[a_1 a_2]}.$$

Антисимметричная часть имеет следующую структуру

$$\psi_{[a_1, a_2]} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab}\psi\,. \tag{121}$$

Поэтому

$$\psi_{a_1 a_2} = \psi_{(a_1 a_2)} + \psi\varepsilon_{a_1 a_2}. \tag{122}$$

Выясним как преобразуется антисимметричная и симметричная части спин-тензора $\psi_{a_1 a_2}$. Имеем

$$\psi'_{[a_1 a_2]} = N_{[a_1}{}^{b_1} N_{a_2]}{}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} \tag{123}$$

Или

$$\psi' \varepsilon_{a_1 a_2} = N_{[a_1}{}^{b_1} N_{a_2]}{}^{b_2} (\psi_{(b_1 b_2)} + \varepsilon_{b_1 b_2}\psi) \tag{124}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} N_{[a_1}{}^{b_1} N_{a_2]}{}^{b_2} \psi_{(b_1 b_2)} &= \frac{1}{2}(N_{a_1}{}^{b_1} N_{a_2}{}^{b_2} - N_{a_2}{}^{b_1} N_{a_1}{}^{b_2}) \frac{1}{2}(\psi_{b_1 b_2} + \psi_{b_2 b_1}) = \\ = \frac{1}{4}(N_{a_1}{}^{b_1} N_{a_2}{}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} &+ N_{a_1}{}^{b_1} N_{a_2}{}^{b_2} \psi_{b_2 b_1} - N_{a_2}{}^{b_1} N_{a_1}{}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} - N_{a_2}{}^{b_1} N_{a_1}{}^{b_2} \psi_{b_2 b_1}) = \\ = \frac{1}{4}(N_{a_1}{}^{b_1} N_{a_2}{}^{b_2} &+ N_{a_1}{}^{b_2} N_{a_2}{}^{b_1} - N_{a_2}{}^{b_1} N_{a_1}{}^{b_2} - N_{a_2}{}^{b_2} N_{a_1}{}^{b_1}) \psi_{b_1 b_2} = 0 \end{aligned} \tag{125}$$

Далее

$$N_{[a_1}{}^{b_1}N_{a_2]}{}^{b_2}\varepsilon_{b_1b_2} = \frac{1}{2}(N_{a_1}{}^{b_1}N_{a_2}{}^{b_2} - N_{a_2}{}^{b_1}N_{a_1}{}^{b_2})\varepsilon_{b_1b_2} =$$
$$= \frac{1}{2}(-N_{a_1}{}^{1}N_{a_2}{}^{2} + N_{a_1}{}^{2}N_{a_2}{}^{1} + N_{a_2}{}^{1}N_{a_1}{}^{2} - N_{a_2}{}^{2}N_{a_1}{}^{1}) =$$
$$= -(N_{a_1}{}^{1}N_{a_2}{}^{2} - N_{a_1}{}^{2}N_{a_2}{}^{1}) = \varepsilon_{a_1a_2}\underbrace{(N_1{}^1N_2{}^2 - N_1{}^2N_2{}^1)}_{\mathtt{det}N=1} = \varepsilon_{a_1a_2}\,. \quad (126)$$

В итоге имеем

$$\psi' = \psi\,. \quad (127)$$

То есть ψ не преобразуется. Рассмотрим преобразование симметричной части

$$\psi'_{(a_1a_2)} = N_{(a_1}{}^{b_1}N_{a_2)}{}^{b_2}\psi_{b_1b_2} == N_{(a_1}{}^{b_1}N_{a_2)}{}^{b_2}(\psi_{(b_1b_2)} + \varepsilon_{b_1b_2}\psi)\,. \quad (128)$$

Имеем

$$\frac{1}{2}(N_{a_1}{}^{b_1}N_{a_2} + N_{a_2}{}^{b_1}N_{a_1}{}^{b_2})\varepsilon_{b_1b_2} =$$
$$\frac{1}{2}(-N_{a_1}{}^{1}N_{a_2}{}^{2} + N_{a_1}{}^{2}N_{a_2}{}^{1} - N_{a_2}{}^{1}N_{a_1}{}^{2} + N_{a_2}{}^{2}N_{a_1}{}^{1}) = 0\,. \quad (129)$$

Поэтому

$$\psi'_{(a_1a_2)} = N_{(a_1}{}^{b_1}N_{a_2)}{}^{b_2}\psi_{(b_1b_2)}\,. \quad (130)$$

Таким образом, компоненты $\psi_{(a_1a_2)}$ и ψ спин-тензора $\psi_{a_1a_2}$ преобразуются независимо друг от друга. Мы видим, что в линейном пространстве спин-тензоров $\psi_{a_1a_2}$ имеются инвариантные подпространства. Это означает, что представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ в этом линейном пространстве приводимо. Очевидно, что представление на спин-тензорах ψ неприводимо, поскольку одномерное. Представление на симметричных спин-тензорах $\psi_{(a_1a_2)}$ так же неприводимо, поскольку единственный инвариантный объект, который можно было бы использовать для выделения инвариантного подпространства это $\varepsilon_{a_1a_2}$, но он уже использован.

Рассмотрим спин-тензор вида $\varphi_{\dot{a}_1\dot{a}_2}$ и проведем рассуждения, аналогичные тем, что привели к (122). Получим

$$\varphi_{\dot{a}_1\dot{a}_2} = \varphi_{(\dot{a}_1\dot{a}_2)} + \varphi\,\varepsilon_{\dot{a}_1\dot{a}_2}\,. \tag{131}$$

При этом компоненты φ и $\varphi_{(\dot{a}_1\dot{a}_2)}$ преобразуются неприводимо.

Перейдем к общему случаю спин-тензоров $\psi_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m}$. Проведем симметризации и антисимметризации по отдельности точечных и неточечных индексов. Каждая антисимметризация пары индексов порождает $\varepsilon_{a_ia_j}$ и $\varepsilon_{\dot{a}_i\dot{a}_j}$ умноженные, на спин-тензор низшего ранга. В каждом таком тензоре опять проведем симметризацию и антисимметризацию неточечных и точечных индексов и так далее. Полностью симметричный по точечным и неточечным индексам спин-тензор $\psi_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m)}$ преобразуется через себя и не может быть сведен с помощью инвариантных тензоров к спин-тензору более простого вида. Это означает, что неприводимое конечномерное представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ реализуется в линейном пространстве спин-тензоров вида $\psi_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m)}$. Это представление обозначается $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$. Можно показать, что его размерность есть $(n+1)(m+1)$ при данных n и m.

8.5 Переход от спинорных индексов к пространственно-временным и наоборот

Инвариантные матричные векторы $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$ и $(\tilde{\sigma}_\mu)_{a\dot{a}}$, имеющие один пространственно-временной индекс и пару спинорных индексов - точечный и неточечный, позволяют конвертировать один векторный индекс в пару спинорных индексов и наоборот. Пусть, например, задан вектор с компонентами t_μ, ему можно сопоставить спин-тензор $t_{a\dot{a}}$ по правилу

$$t_{a\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}t_\mu\,. \tag{132}$$

Отсюда с использованием четвертого из тождеств (118) получим

$$t_\mu = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}t_{a\dot{a}}\,. \tag{133}$$

Заметим, что спин-тензор $t_{a\dot{a}}$ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ группы $SL(2|\,\mathbb{C})$. Поскольку, согласно (132) и (133), спин-тензор $t_{a\dot{a}}$ эквивалентен вектору t_μ, то лоренцевский вектор t_μ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ группы $SL(2|\,\mathbb{C})$.

Соотношения (132) и (133) указывают общий способ конвертации пространственно-временных индексов в спинорные и наоборот. Надо применять правило (132) к каждому пространственно-временному индексу и правило (133) к каждой паре, состоящей из точечных и неточечных спинорных индексов.

Пусть задан тензор n-го ранга $t_{\mu_1\dots\mu_n}$. Ему соответствует спин-тензор точечного ранга n и неточечного ранга n следующего вида:

$$t_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_n} = (\sigma^{\mu_1})_{a_1\dot{a}_1}\dots(\sigma^{\mu_n})_{a_n\dot{a}_n}t_{\mu_1\dots\mu_n}\,, \tag{134}$$

Отсюда, согласно правилу (133)получаем

$$t_{\mu_1\dots\mu_n} = \frac{1}{2^n}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1}\dots(\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n}t_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_n} \tag{135}$$

Соотношения (134),(135), показывают, что спин-тензор с равным количеством неточечных и точечных индексов эквивалентен некоторому лоренцевскому тензору. Заметим, однако, что спин-тензор $t_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_m}$ не сводится при $m\neq n$ ни к каким чисто лоренцевским тензорам без дополнительных ограничений.

Переход от пространственно-временных индексов к спинорным может оказаться полезным при выполнении некоторых преобразований типа выделения неприводимых компонент. В качестве примера рассмотрим тензор второго ранга $t_{\mu\nu}$. Введем соответствующий ему спин-тензор $t_{ab\dot{a}\dot{b}}$ по правилу (134)

$$t_{ab\dot{a}\dot{b}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}}t_{\mu\nu}\,, \tag{136}$$

Спин-тензор $t_{ab\dot{a}\dot{b}}$ разобьем на неприводимые компоненты с помощью симметризации и антисимметризации.

$$\begin{aligned} t_{ab\dot{a}\dot{b}} &= t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + t_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]} + t_{[ab](\dot{a}\dot{b})} + t_{[ab][\dot{a}\dot{b}]} = \\ &= t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}t_{(ab)} + \varepsilon_{ab}t_{(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}t\,, \end{aligned} \tag{137}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
t_{(ab)} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}t_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]} \\
t_{(\dot{a}\dot{b})} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}t_{[ab](\dot{a}\dot{b})}\,, \\
t &= \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}t_{[ab][\dot{a}\dot{b}]} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}t_{ab\dot{a}\dot{b}}
\end{aligned}
\tag{138}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
t_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}(\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b}t_{ab\dot{a}\dot{b}} = \\
&= \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}(\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b}(t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}t_{(ab)} + \varepsilon_{ab}t_{(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}t)
\end{aligned}
$$

Прямыми вычислениями это выражение приводится к виду:

$$
t_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}t_{(ab)} - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}}t^{(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t\,, \tag{139}
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b &= -\frac{1}{4}(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu)^b_{\dot{a}}\,, \\
(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} &= -\frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu\sigma_\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}
\end{aligned}
\tag{140}
$$

При этом

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}, && \tilde{\sigma_{\mu\nu}} = -\tilde{\sigma_{\nu\mu}} \\
&(\sigma_{\mu\nu})^{ab} = (\sigma_{\mu\nu})^{ba}, && (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}} = (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{b}\dot{a}}
\end{aligned}
\tag{141}
$$

Соотношение (141) представляет собой разложение произвольного тензора второго ранга на неприводимые компоненты. Отсюда следует, что произвольный тензор второго ранга соответствует приводимому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$, включающему следующие неприводимые представления (1,1), (1,0), (0,1), (0,0). Последнее представление отвечает лоренцевскому скаляру, то есть тривиальному представлению $N \to 1$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Пусть тензор $t_{\mu\nu}$ симметричен, $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$. Поскольку матрицы $\sigma_{\mu\nu}$, $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$ (140) антисимметричны по μ, ν, то из (139) следует, что $t_{(ab)=0}$, $t^{(\dot{a}\dot{b})=0}$. Поэтому в данном случае

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma_\mu})^{\dot{a}a}(\tilde{\sigma_\nu})^{\dot{b}b}t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t \tag{142}$$

Можно показать, что первое слагаемое автоматически симметрично по μ, ν. Следовательно произвольный симметричный тензор второго ранга отвечает сумме двух неприводимых представлений (1,1) и (0,0) группы $SL(2|\mathbb{C})$. Пусть дополнительно к симметричности тензор $t_{\mu\nu}$ является бесследовым, $\varepsilon^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = 0$, тогда из соотношения (142) следует, что $t = 0$. Поэтому симметричный бесследовый тензор второго ранга соответствует неприводимому представлению (1,1) группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Пусть тензор $t_{\mu\nu}$ антисимметричен, $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$. Тогда из (139) следует, что $t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} = 0$, $t = 0$. Поэтому

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}t_{(ab)} - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{(\dot{a}\dot{b})}t^{(\dot{a}\dot{b})}$$

То есть, антисимметричный тензор второго ранга соответствует сумме двух неприводимых представлений (1,0) и (0,1) группы $SL(2|\mathbb{C})$

Рассмотрим неприводимый спин-тензор $t_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n)}$, отвечающий представлению $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. Ему соответствует лоренцевский тензор

$$t_{\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1a_1}\ldots(\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_na_n}t_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n)} \tag{143}$$

Можно показать, что правая часть (143) автоматически полностью симметрична по индексам $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Поэтому $t_{\mu_1\ldots\mu_n}$ (143) есть полностью симметричный тензор ранга n, $t_{\mu_1\ldots\mu_n} = t_{(\mu_1\ldots\mu_n)}$. Рассмотрим

$$\eta^{\mu_1\mu_2}t_{\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{1}{2^n}\eta^{\mu_1\mu_2}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1a_1}(\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2a_2}(\tilde{\sigma}_{\mu_3})^{\dot{a}_3a_3}\ldots(\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_na_n}t_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n)}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}\eta^{\mu_1\mu_2}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1a_1}(\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2a_2} &= (\sigma^\mu)^{a_1\dot{a}_1}(\sigma_\mu)^{a_2\dot{a}_2} = \\ &= \varepsilon^{a_1c_1}\varepsilon^{\dot{a}_1\dot{c}_1}(\sigma^\mu)_{c_1\dot{c}_1}(\sigma_\mu)^{a_2\dot{a}_2} = \\ &= \varepsilon^{a_1c_1}\varepsilon^{\dot{a}_1\dot{c}_1}2\delta_{c_1}{}^{a_2}\delta_{\dot{c}_1}{}^{\dot{a}_2} = 2\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon^{\dot{a}_1\dot{a}_2}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\eta^{\mu_1\mu_2}t_{\mu_1\dots\mu_n} = 2\frac{1}{2^n}\eta^{\mu_1\mu_2}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1a_1}(\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2a_2}(\tilde{\sigma}_{\mu_3})^{\dot{a}_3a_3}\dots$$
$$\dots(\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_na_n}t_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_n)} = 0 \qquad (144)$$

Следовательно $\eta^{\mu_1\mu_2}t_{\mu_1\dots\mu_n} = 0$. Таким образом, соотношение (143) задает полностью симметричный бесследовый тензор n-го ранга. Это означает, что полностью симметричный бесследовый лоренцевский тензор n-го ранга соответствует неприводимому представлению $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

По построению, произвольный спин-тензор $\psi_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_m}$ является комплексным. Рассмотрим закон его преобразования

$$\psi'_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_m} = N_{a_1}{}^{c_1}\dots N_{a_n}{}^{c_n}(N^*)_{\dot{b}_1}{}^{\dot{d}_1}\dots(N^*)_{\dot{b}_m}{}^{\dot{d}_m}\psi_{c_1\dots c_n\dot{d}_1\dots\dot{d}_m}$$

Совершим комплексное сопряжение этого равенства, получим

$$(\psi'_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_m})^* = N_{b_1}{}^{d_1}\dots N_{b_m}{}^{d_m}(N^*)_{\dot{a}_1}{}^{\dot{c}_1}\dots(N^*)_{\dot{a}_n}{}^{\dot{c}_n}(\psi_{c_1\dots c_n\dot{d}_1\dots\dot{d}_m})^*$$

Мы видим, что $(\psi'_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_m})^*$ преобразуется как спин-тензор с m неточечными индексами и n точечными индексами. Положим по определению

$$(\psi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_m})^* = \bar{\psi}_{b_1\dots b_m\dot{a}_1\dots\dot{a}_n}. \qquad (145)$$

Говорят, что спин-тензор $\bar{\psi}_{b_1\dots b_m\dot{a}_1\dots\dot{a}_n}$ (145) является комплексно сопряженным к спин-тензору $\psi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_m}$.

Выясним при каких условиях спин-тензор может быть вещественным. В этом случае он должен совпадать со своим комплексно сопряженным, то есть должно выполняться

$$\psi_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_m} = \bar{\psi}_{a_1\dots a_m\dot{a}_1\dots\dot{a}_n} \qquad (146)$$

Отсюда следует, что $m = n$. Поэтому вещественный спин-тензор должен иметь структуру $\psi_{a_1\dots a_n\dot{a}_1\dots\dot{a}_n}$. Поскольку в этом случае числа точечных и неточечных индексов совпадают, то вещественный спин-тензор всегда может быть конвертирован в лоренцевский тензор по правилу (135).

8.6 Генераторы группы $SL(2|\mathbb{C})$ в фундаментальном и сопряженном представлениях

В фундаментальном представлении группа $SL(2|\mathbb{C})$ задается комплексными 2×2 матрицами N с определителем равным единице. Матрицы N действуют линейном пространстве левых вейлевских спиноров по правилу.

$$\psi'_a = N_a{}^b \psi_b$$

В окрестности единицы $N = E + T$ или $N_a{}^b = \delta_a{}^b + T_a{}^b$, где E - единичная 2×2 матица, а $T_a{}^b$ 2×2 матрица с бесконечно малыми элементами. В низшем порядке по T имеет место равенство $detN = 1 + trT$. Поскольку $detN = 1$, то $trT = 0$. Разложим матрицу T по базису σ_μ. Так как $tr\sigma_0 = 2$, $tr\sigma_i = 0$, то $T = z_i\sigma_i$, где z_i - произвольные комплексные числа. Мы видим, что в окрестности единицы каждая матрица N задается шестью вещественными параметрами Rez_i, Imz_i; $i = 1, 2, 3$.

Известно, что в окрестности единичного элемента, каждый элемент представления группы Лоренца записывается в виде $e^{\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}$ где $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ - шесть вещественных параметров, а $J_{\alpha\beta}$ - генераторы группы Лоренца в рассматриваемом представлении. Наша цель найти генераторы $J_{\alpha\beta}$ в фундаментальном и сопряженном представлениях.

В окрестностях единичного элемента $e^{\frac{i}{2}omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}} = 1 + T$. В фундаментальном представлении $T = z_i\sigma_i$. Покажем, что выражение $z_i\sigma_i$ можно тождественно переписать как $\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$, где $\omega^{\alpha\beta}$ вещественные параметры.

Рассмотрим

$$\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \omega^{0i}\sigma_{0i} + \frac{1}{2}\omega^{ij}\sigma_{ij}$$

Из определения $\sigma_{\mu\nu}$ имеем

$$\sigma_{0i} = -\frac{1}{4}(\sigma_0\tilde{\sigma}_i - \sigma_i\tilde{\sigma}_0) = -\frac{1}{4}(-\sigma_i - \sigma_i) = \frac{1}{2}\sigma_i$$
$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{4}(\sigma_i\tilde{\sigma}_j - \sigma_j\tilde{\sigma}_i) = \frac{1}{4}(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) = \frac{1}{4}[\sigma_i, \sigma_j] = \frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\omega^{0i}\sigma_i + \frac{i}{4}\omega^{ij}\varepsilon_{ijk}\sigma_k = \\ &= \frac{1}{2}\omega^{01}\sigma_1 + \frac{1}{2}\omega^{02}\sigma_2 + \frac{1}{2}\omega^{03}\sigma_3 + \\ &+ \frac{i}{2}\omega^{12}\sigma_3 + \frac{i}{2}\omega^{23}\sigma_1 + \frac{i}{2}\omega^{31}\sigma_2 = \\ &= \frac{1}{2}(\omega^{01} + i\omega^{23})\sigma_1 + \frac{1}{2}(\omega^{02} + i\omega^{31})\sigma_2 + \frac{1}{2}(\omega^{03} + i\omega^{12})\sigma_3\end{aligned}$$

Отсюда следует, что комплексные параметры z_i есть

$$z_1 = \frac{1}{2}(\omega^{01} + i\omega^{23})\sigma_1$$
$$z_2 = \frac{1}{2}(\omega^{02} + i\omega^{31})\sigma_2$$
$$z_3 = \frac{1}{2}(\omega^{03} + i\omega^{12})\sigma_3$$

Таким образом, в окрестности единичного элемента

$$N = E + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = E + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta}) \tag{147}$$

Следовательно генераторы группы Лоренца в фундаментальном представлении имеют вид:

$$(J_{\alpha\beta})^F = -i\sigma_{\alpha\beta} \tag{148}$$

Значок F указывает на фундаментальное представление. Используя (148) можно записать бесконечно малую форму преобразования левого вейлевского спинора при преобразованиях Лоренца. Имеем

$$\psi'_a = N_a{}^b\psi_b = (\delta_a{}^b + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b)\psi_b = \psi_a + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b)\psi_b$$

Отсюда

$$\delta\psi_a = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b)\psi_b \tag{149}$$

Перейдем к нахождению генераторов группы Лоренца в сопряженном представлении. Совершим комплексное сопряжение в соотношении (149), получим

$$\delta\bar{\psi}_{\dot{a}} = -\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(i\sigma^*_{\alpha\beta})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\bar{\psi}_{\dot{b}}$$

или

$$\delta\bar{\psi}^{\dot{a}} = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}(-i\sigma^*_{\alpha\beta})_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}}$$

Прямым вычислением компонент можно показать, что

$$\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}(\sigma^*_{\alpha\beta})_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}} = (\tilde{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{150}$$

Поэтому

$$\delta\bar{\psi}^{\dot{a}} = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\tilde{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}} \tag{151}$$

Отсюда следует, что генераторы группы Лоренца в сопряженном представлении имеют вид

$$(J_{\alpha\beta})^{\bar{F}} = -i\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{152}$$

Значок $\bar{F}$ указывает на сопряженное представление.

8.7 Операторы Казимира группы Лоренца

Обратимся к соотношениям (51), определяющим коммутационные соотношения генераторов Лоренцевских вращений $J_{\mu\nu}$. В силу антисимметрии эти операторы имеют компоненты J_{0i}, J_{ij}. Запишем, исходя из (51), коммутационные соотношения между этими компонентами. Подставляя в (51) последовательно $\mu = 0, i$ и $\nu = 0, j$, получим

$$\begin{aligned}
&[J_{0i}, J_{0j}] = iJ_{ij}\\
&[J_{0i}, J_{jk}] = i(\delta_{ij}J_{0k} - \delta_{ik}J_{0j})\\
&[J_{ij}, J_{kl}] = i(\delta_{il}J_{jk} + \delta_{jk}J_{il} - \delta_{ik}J_{jl} - \delta_{jl}J_{ik})
\end{aligned} \tag{153}$$

Введем операторы

$$K_i = J_{0i} \tag{154}$$

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk} \tag{155}$$

Из последнего соотношения

$$J_{ij} = -\epsilon_{ijk}J_k \tag{156}$$

Здесь использовано тождество $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. Тогда коммутационные соотношения (153) между J_{0i}, J_{ij} можно переписать в терминах J_i, K_i в виде

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{157}$$

$$[K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{158}$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{159}$$

Определим теперь операторы

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ B_i &= \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \end{aligned} \tag{160}$$

Используя соотношения (154), (155), (156), получим

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk}A_k \\ [B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk}B_k \end{aligned} \tag{161}$$

В результате мы получили коммутационные соотношения для генераторов двух, несвязанных друг с другом, групп $SU(2)$. Описание неприводимых представлений группы $SU(2)$ хорошо известны (например из теории углового момента в нерелятивистской квантовой механике). Мы приведем только основные результаты для рассматриваемого случая. Имеется два независимых оператора Казимира, $A^2 = A_i A_i$ и $B^2 = B_i B_i$. Базис неприводимого представления составляют векторы $|N, N_3; M, M_3 >$ (мы используем здесь удобные квантовомеханические обозначения), где $N, M = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ...$, и для заданных N, M, числа N_3, M_3, принимают значения $N_3 = -N, -N+1, ..., N-1, N; M_3 = -M, -M+1, ..., M-1, M$. При этом

$$\begin{aligned}
&A^2|N, N_3; M, M_3 >= N(N+1)|N, N_3; M, M_3 > \\
&A_3|N, N_3; M, M_3 >= N_3|N, N_3; M, M_3 > \\
&B^2|N, N_3; M, M_3 >= M(M+1)|N, N_3; M, M_3 > \\
&B_3|N, N_3; M, M_3 >= M_3|N, N_3; M, M_3 >
\end{aligned} \tag{162}$$

Ранее было показано, что неприводимое представление группы Лоренца, обозначенное $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}); n, m = 0, 1, 2, ...$, реализуется на спин-тензорах вида $\psi_{(a_1...a_n)(\dot{a}_1...\dot{a}_m)}$. Это означает, что в пространстве спин-тензоров $|N, N_3; M, M_3 >= \psi_{(a_1...a_n)(\dot{a}_1...\dot{a}_m)}$, причем $N = \frac{n}{2}, M = \frac{m}{2}$. В соответствии с соотношениями (162) будем считать, что операторы A_i действуют на неточечные индексы спин-тензора, а операторы B_i - на точечные индексы.

8.8 Преобразование спин-тензоров при пространственных отражениях

Пространственное отражение, называемое также преобразованием четности, задается соотношением (16)и является одним из дискретных преобразований Лоренца. При таком преобразовании обычный трехмерный вектор преобразуется также как и трехмерные координаты, то есть меняет знак, а аксиальный вектор остается инвариантным. Это в частности означает, что трехмерный векторный оператор K_i (154) меняет знак, а трехмерный векторный оператор J_i (155) не меняет знак (поскольку определен с помощью ϵ- символа, и поэтому является аксиальным вектором). Оператор J_{ij} имеет два векторных индекса и следовательно инвариантен относительно пространственных отражений.

Матрице Λ_P (15), реализующей пространственное отражение в пространстве Минковского, сопоставим линейный оператор $\hat{\mathcal{P}}$, действующий на базисные векторы неприводимого представления $|N, N_3; M, M_3 > \rightarrow \hat{\mathcal{P}}|N, N_3; M, M_3 >$ и на операторы X в пространстве представления $X \rightarrow \hat{\mathcal{P}} X \hat{\mathcal{P}}^{-1}$. Поскольку $(\Lambda_P)^2 = I$, то $(\hat{\mathcal{P}})^2 = \mathbf{1}$, здесь I - единичная 4×4 матрица, а $\mathbf{1}$ - единичный оператор в пространстве неприводимого представления. Это означает, что $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^{-1}$. Будем называть оператор $\hat{\mathcal{P}}$ оператором четности или оператором пространственного отражения. Учитывая, что K_i является обычным вектором, а J_i аксиальным вектором, получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}} K_i \hat{\mathcal{P}}^{-1} &= -K_i \\ \hat{\mathcal{P}} J_i \hat{\mathcal{P}}^{-1} &= J_i \end{aligned} \qquad (163)$$

Тогда из соотношений (160), (163) найдем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}} A_i \hat{\mathcal{P}}^{-1} &= B_i \\ \hat{\mathcal{P}} B_i \hat{\mathcal{P}}^{-1} &= A_i \end{aligned} \qquad (164)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{P}} A^2 |N, N_3; M, M_3 >= N(N+1) \hat{\mathcal{P}} |N, N_3; M, M_3 >= \\ &\hat{\mathcal{P}} A^2 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \hat{\mathcal{P}} |N, N_3; M, M_3 >= B^2 \hat{\mathcal{P}} |N, N_3; M, M_3 > \end{aligned}$$

То есть $B^2 \hat{\mathcal{P}}|N, N_3; M, M_3 >= N(N+1)\hat{\mathcal{P}}|N, N_3; M, M_3 >$. Аналогично $A^2 \hat{\mathcal{P}}|N, N_3; M, M_3 >= M(M+1)\hat{\mathcal{P}}|N, N_3; M, M_3 >$. Или

$$\begin{aligned} B^2 \hat{\mathcal{P}} \psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)} &= n(n+1) \hat{\mathcal{P}} \psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)} \\ A^2 \hat{\mathcal{P}} \psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)} &= m(m+1) \hat{\mathcal{P}} \psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)} \end{aligned} \qquad (165)$$

Но оператор A^2 действует на неточечные индексы спин-тензора и его собственные значения определяются числом неточечных индексов, а оператор B^2 действует на точечные индексы и его собственные значения определяются числом точечных индексов. Следовательно преобразованный спин-тензор $\hat{\mathcal{P}} \psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)}$ имеет m неточечных индексов и n точечных. Исходный спин-тензор $\psi_{(a_1 \ldots a_n)(\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m)}$ имеет n неточечных индексов и m точечных. Это означает, что оператор $\hat{\mathcal{P}}$ меняет точечные и неточечные индексы, то есть $\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1...a_n)(\dot{a}_1...\dot{a}_m)} \sim \psi_{(a_1...a_n)(\dot{a}_1...\dot{a}_m)}$. Другими словами, под действием пространственного отражения представление $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ переходит в представление $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$.

9 Неприводимые представления группы Пуанкаре

Перейдем к изучению неприводимых представлений группы Пуанкаре. Под группой Пуанкаре мы будем понимать только собственную группу Пуанкаре, содержащую в качестве подгрупп собственную группу Лоренца и группу трансляции. Как и в случае группы Лоренца, нас будет интересовать только описания пространств неприводимого представления.

Ранее было показано, что группа Пуанкаре имеет два генератора P_μ и $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям. (42), (45), (51). Из этих генераторов строятся два оператора Казимира $C_1 = P_\mu P^\mu$ и $C_2 = W^\mu W_\mu$, где W_μ - Вектор Паули-Любаньского (55)

Мы будем рассматривать неприводимые унитарные представления в бесконечномерном пространстве и использовать для векторов этого пространства квантовомеханические обозначения $|\Psi>$. Однако задача, которую мы рассматриваем является чисто математической и прямого отношения к квантовой механике не имеет.

9.1 Общая схема построения неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре

Известно, что в пространстве неприводимого представления операторы Казимира действуют как операторы умножения на константу. Поэтому для нахождения пространства неприводимого представления можно рассмотреть задачу на собственные значения.

$$\begin{aligned} C_1|\Psi> &= m^2|\Psi> \\ C_2|\Psi> &= l|\Psi> \end{aligned} \tag{166}$$

здесь m^2, l - собственные значения операторов C_1, C_2 соответственно. При этом каждое пространство неприводимого представления характеризуется своими фиксированными значениями параметров m^2, l.

Поставим перед собой задачу о нахождении базиса в пространстве неприводимого представления. Это можно сделать следующим образом. Дополним операторы Казимира C_1, C_2 до полного набора взаимно коммутирующих операторов, добавляя необходимые операторы. Далее рассмотрим задачу на собственные значения для всех операторов этого набора. Соответствующие собственные векторы и формируют искомый базис.

Часть подходящих для полного набора операторов находится сразу, это генераторы трансляций P_μ, коммутирующие со всеми коммутаторами Казимира C_1, C_2 и между собой. Рассмотрим задачу на собственные значения.

$$\begin{aligned} &P_\mu|m^2, l, p, \sigma >= p_\mu|m^2, l, p, \sigma > \\ &P^2|m^2, l, p, \sigma >= m^2|m^2, l, p, \sigma > \\ &W^2|m^2, l, p, \sigma >= l|m^2, l, p, \sigma > \end{aligned} \tag{167}$$

здесь p_μ - собственное значение операторов P_μ. Индекс σ нумерует дополнительные индексы, которые возможно надо ввести, чтобы набор векторов $|m^2, l, p, \sigma >$ формировал базис.

Поскольку $P^2 = P^\mu P_\mu$, то из двух первых уравнений (167) следует, что

$$p^2 = m^2 \tag{168}$$

или $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$. На трехмерный вектор $\vec{p}$ никаких ограничений не возникает. Поэтому каждый базисный вектор $|m^2, l, p, \sigma >$ неприводимого представления нумеруется вектором $\vec{p}$. Следовательно рассматриваемое пространство неприводимого представления бесконечномерно (как это и должно быть для унитарного представления некомпактной группы Ли). Неприводимое представление группы Пуанкаре принято называть элементарной системой или элементарной частицей, четыре-вектор p^μ принято называть вектором энергии-импульса этой системы, а параметр

m^2 - квадратом массы этой системы. Соотношение (168) представляет собой известную связь между энергией и импульсом релятивистской системы.

Итак, базис неприводимого представления задается векторами $|m^2, l, p, \sigma>$, нумеруемыми величинами $\vec{p}$ и σ. Параметры m^2, l в каждом неприводимом представлении зафиксированы, переменными являются $\vec{p}$ и σ. Заметим, что значения параметра m^2, в частности знак, не определяются уравнением (167). Кроме того знак p_0 также не определяется этими уравнениями. Отсюда вытекает, что неприводимые представления группы Пуанкаре, с формальной точки зрения, разбиваются на шесть классов:

$$
\begin{array}{llll}
\textit{класс} & (m_+): & m^2 > 0, & p_0 > 0 \\
\textit{класс} & (m_-): & m^2 > 0, & p_0 < 0 \\
\textit{класс} & (0_+): & m^2 = 0, & p_0 > 0 \\
\textit{класс} & (0_-): & m^2 = 0, & p_0 < 0 \\
\textit{класс} & (M): & p^2 = -M^2, & M^2 > 0 \\
\textit{класс} & (0_0): & m^2 = 0, & p_\mu = 0
\end{array}
$$

Из этих шести классов, физический интерес представляют собой только классы (m_+) и (0_+), отвечающие соответственно массивным и безмассовым элементарным системам с положительной энергией. Классы (m_-) и (0_-) соответствуют системам с отрицательной энергией. Такие системы не имеют наименьшей энергии и не могут быть стабильными, их обычно называют духами, чтобы подчеркнуть, что им не отвечают никакие реально существующие объекты природы. Класс (M) соответсвует системам с мнимой массой, такие системы называют тахионами, объекты такого типа в природе не наблюдаются. Класс (0_0) отвечает системе с нулевой энергией и нулевым трехмерным импульсом. Такая система полностью статична и не представляет интереса. Далее мы будем рассматривать представления, отвечающие классу (m_+) и называемые массивными и представления, отвечающие классу (0_+) и называемые безмассовыми.

Рассмотрим действие операторов представления $U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda)$

на базисные векторы. Действие оператора трансляций легко находится:

$$U(a)|m^2,l,p,\sigma>=e^{ia^\mu P_\mu}|m^2,l,p,\sigma>=e^{ia^\mu p_\mu}|m^2,l,p,\sigma> \qquad (169)$$

Действие этих операторов сводится к умножению на фазовый множитель $e^{ia^\mu p_\mu}$, который при переменной a^μ и фиксированном p_μ имеет смысл плоской волны с импульсом p_μ. Это еще раз подчеркивает физический смысл p_μ как вектора энергии-импульса.

Исследуем действие оператора $U(\Lambda)=e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}$ на базисные вектора. Рассмотрим

$$P_\mu U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>=U(\Lambda)U^+(\Lambda)P_\mu U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>. \qquad (170)$$

Здесь использовано, что $U(\Lambda)U^+(\Lambda)=\mathbf{1}$. Поскольку оператор $U(\Lambda)$ генерирует преобразования Лоренца, то

$$U^+(\Lambda)P_\mu U(\Lambda)=\Lambda^\nu{}_\mu P_\nu$$

(см. (44)). Тогда из (170) следует

$$P_\mu U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>=\Lambda^\nu{}_\mu P_\nu|m^2,l,p,\sigma> \qquad (171)$$

Кроме того, очевидно

$$\begin{aligned} &P^2U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>=m^2U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma> \\ &W^2U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>=l\;U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>. \end{aligned} \qquad (172)$$

Здесь учтено, что операторы Казимира P^2, W^2 коммутируют с генераторами $J_{\mu\nu}$ и, следовательно с любой функцией от них. Соотношение (172) показывает, что векторы $U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>$ при любых матрицах Λ принадлежат пространству неприводимого представления с фиксированными значениями m^2, l. Соотношение (171) означает, что вектор $U(\Lambda)|m^2,l,p,\sigma>$ характеризуется лоренц-преобразованным импульсом.

$$\bar{p}_\mu=\Lambda^\nu{}_\mu p_\nu \qquad (173)$$

причем $\bar{p}^2=p^2=m^2$. Следовательно базис неприводимого представления включает все векторы вида $|m^2,l,\Lambda p,\sigma>$, где $p_\mu\equiv(\varepsilon(\vec{p}),\vec{p})$,

$\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ и матрица Λ пробегает всю собственную группу Лоренца. Если один из множества векторов $|m^2, l, \Lambda p, \sigma>$ удовлетворяет уравнению $W^2|m^2, l, \Lambda p, \sigma> = l|m^2, l, \Lambda p, \sigma>$, то и любой другой вектор данного вида удовлетворяет рассматриваемому уравнению. Отсюда вытекает идея решения уравнения $W^2|m^2, l, p, \sigma> = l|m^2, l, p, \sigma>$ и нахождения возможных значений l. Надо из множества импульсов вида (173) выбрать один импульс q_μ такой, чтобы рассматриваемое уравнение имело наиболее простой вид. При этом значение l не зависит от того, какой представитель из q_μ из множества импульсов (173) был выбран.

Однако если на вектор $|m^2, l, q, \sigma>$ подействовать произвольным оператором $U(\Lambda)$, то получим вектор $|m^2, l, \Lambda q, \sigma>$, зависящий от импульсов $\Lambda^\nu{}_\mu q_\nu \neq q_\mu$. Тогда возникает еще одна идея, а именно сузить множество операторов $U(\Lambda)$, ограничив его только теми операторами $U(\Lambda^{(q)})$, которые содержат подкласс матриц $\Lambda^{(q)}$, не изменяющих вектор q_μ. То есть

$$\Lambda^{(q)\nu}{}_\mu q_\nu = q_\mu \tag{174}$$

Не трудно показать, что множество преобразований Лоренца, удовлетворяющих условию (174) образует группу, называемую группой стабильности вектора q_μ . Обозначим V_q, подпространство векторов $|m^2, l, q, \sigma>$, с фиксированными m, l, q, но с различными σ . При действиями операторами $U(\Lambda^{(q)})$ на векторы из пространства V_q, мы получим векторы, принадлежащие V_q. Не трудно показать, что множество операторов $U(\Lambda^{(q)})$ образуют группу называемую группой стабильности подпространства V_q. Обозначим эту группу H_q.

Выясним структуру группы H_q. Произвольный оператор $U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}$ зависит от параметров $\omega^{\mu\nu}$ преобразования Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu$. Найдем параметры $\omega^{(q)}_{\mu\nu}$, отвечающие матрицам $\Lambda^{(q)\mu}{}_\nu$. Запишем $\Lambda^{(q)\mu}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$. Тогда уравнение (174) примет вид

$$\omega^{(q)\mu\nu} q_\nu = 0 \tag{175}$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega^{(q)\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} q_\lambda n_\rho = 0, \tag{176}$$

где n_ρ - произвольный вектор. Следовательно операторы $U(\Lambda^{(q)})$ записываются в форме

$$U(\Lambda^{(q)}) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}q_\lambda n_\rho J_{\mu\nu}} \tag{177}$$

и параметризуются компонентами вектора n_ρ. В подпространстве V_q мы можем заменить вектор q_λ оператором P_λ, собственным значением которого он является. Тогда

$$U(\Lambda^{(q)}) = e^{\frac{i}{2}n_\rho\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}P_\lambda J_{\mu\nu}} = e^{-in_\rho W^\rho} \tag{178}$$

где мы ввели вектор Паули-Любаньского W^ρ (176). Таким образом, группа H_q состоит из операторов вида (178). Генераторами этой группы являются W^ρ, а параметрами n_ρ. В литературе группу H_q принято называть малой группой. Заметим, что в отличие от операторов $U(\Lambda)$ общего вида, нумеруемых шестью параметрами $\omega^{\mu\nu}$, операторы $U(\Lambda^{(q)})$ (178)нумеруются четырьмя параметрами n_ρ.

Таким образом, задача о нахождении возможных значений l σ сводится к описанию неприводимых представлений малой группы H_q. Дальнейшее рассмотрение связано с удобным выбором вектора q_μ, этот выбор делается по разному для массивных и безмассовых представлений.

9.2 Массивные неприводимые представления группы Пуанкаре

Если $q^2 = m^2$ и $m^2 \neq 0$, то вектор q_μ всегда можно выбрать в виде $q_\mu = (m, 0, 0, 0)$. Найдем соответствующие компоненты вектора W^ρ, имеем

$$W^\rho = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}q_\lambda J_{\mu\nu} = -\frac{m}{2}\varepsilon^{0\rho\mu\nu}J_{\mu\nu} \tag{179}$$

Отсюда

$$W^0 = 0 \qquad W_i = -\frac{m}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk} \tag{180}$$

Обозначим

$$S_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk} \tag{181}$$

Тогда

$$W_i = mS_i \tag{182}$$

Установим коммутационные соотношения для операторов S_i (182). Рассмотрим

$$\begin{aligned}[S_i, S_j] &= \frac{1}{m^2}[W_i, W_j] = -\frac{i}{m^2}\varepsilon_{ij\lambda\rho}P^\rho W^\rho = \\ &= -\frac{i}{m}\varepsilon_{ij0\rho}W^\rho = \frac{i}{m}\varepsilon_{ijk}W_k = i\varepsilon_{ijk}S_k\end{aligned}$$

То есть

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k \tag{183}$$

Мы получили коммутационные соотношения для генераторов групп трехмерных вращений $SO(3)$. Заметим, что соотношения (183) - это известные из нерелятивистской квантовой механики коммутационные соотношения для оператора углового момента.

Рассмотрим оператор Казимира C_2. В данном случае

$$C_2 = W^\mu W_\mu = -W_i W_i = -m^2 S_i S_i = -m^2 S^2 \tag{184}$$

Таким образом оператор S^2 есть оператор Казимира малой группы H_q. Как известно, он является единственным оператором Казимира группы $SO(3)$.

Исследуем задачу на собственные значения для оператора S^2. Согласно (184), собственные векторы оператора S^2 будут собственными векторами оператора C_2. Не трудно проверить, что оператор S_3 коммутирует с оператором S^2, поэтому эти операторы имею общие собственные векторы. Собственные значения операторов S_3 и S^2 хорошо известны (например из теории углового момента в нерелятивистской квантовой механике). Они равны соответственно σ и $s(s+1)$. При этом параметр s принимает следующие значения:

$$s = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \ldots \tag{185}$$

При каждом фиксированном значении s величина σ изменяется так

$$\sigma = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ s-1,\ s \tag{186}$$

то есть принимает $2s+1$ значений.

В результате мы видим, что векторы $|m^2, l, q, \sigma>$ являются собственными векторами операторов W^2 и S_3

$$\begin{aligned} &W^2|m^2, l, q, \sigma >= -m^2 S^2 |m^2, l, q, \sigma >= -m^2 s(s+1)|m^2, l, q, \sigma > \\ &S_3|m^2, l, q, \sigma >= \sigma|m^2, l, q, \sigma > \end{aligned} \tag{187}$$

Отсюда следует, что $l = -m^2 s(s+1)$. Далее мы будем обозначать $|m^2, l, q, \sigma > |_{l=-m^2 s(s+1)} = |m^2, s, q, \sigma >$. Мы видим, что неприводимые представления малой группы нумеруются параметром s, принимающим значения (185). При каждом фиксированном s представление конечномерно, его размерность равна $2s+1$. Таким образом, уравнение $W^2|m^2, l, q, \sigma >= l|m^2, l, q, \sigma >$ решено в подпространстве V_q, где $p_\mu = q_\mu = (m, 0, 0, 0)$ и собственное значение l найдено. Обратим внимание, что данный вектор q_μ соответствует вектору энергии-импульса частицы с массой m в системе отчета, относительно которой частица покоится. Базис неприводимого представления, отвечающего произвольному вектору p_μ, $p^2 = m^2$ получается из векторов $|m^2, s, q, \sigma >$ действием операторов $U(\Lambda)$.

Итак, базис массивного неприводимого представления группы Пуанкаре составляют векторы $|m^2, s, q, \sigma >$, где $p_0 = \varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\ 2} + m^2}$. Неприводимое представление задается двумя параметрами m^2 и s. Первый из них есть квадрат массы элементарной системы. Параметр s называется спином элементарной системы. Возможные значения спина даются (185). Оператор S^2, собственное значение которого есть $s(s+1)$ называется оператором квадрата спина, а операторы S_i - операторами спина. Переменная σ, принимающая в неприводимом представлении с данными m^2 и s значения $-s, -s+1, ..., s-1, s$ называется проекцией спина на какое-либо одно фиксированное направление в трехмерном пространстве.

9.3 Безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре

Перейдем к рассмотрению безмассовых неприводимых представлений. Прежде всего надо выбрать подходящий вектор q_μ. Поскольку теперь $q^2 = 0$, то выбор, использованный в разделе 1.7.2 невозможен. Мы выберем вектор q_μ в виде $q_\mu = (E, 0, 0, E)$, где E - произвольная не равная нулю константа. Очевидно, что условие $q^2 = 0$ выполняется автоматически.

Исследуем структуру малой группы H_q . Для этого надо сначала найти компоненты вектора W_μ . Воспользуемся тождеством $W^\mu P_\mu = 0$, которое в подпространстве H_q принимает вид $W_0 q_0 - W_3 q_3 = E(W_0 - W_3) = 0$. Отсюда

$$W_0 = W_3 \tag{188}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{1\rho\mu\nu}P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{10\mu\nu}J^{\mu\nu}E - \frac{1}{2}\varepsilon_{13\mu\nu}J^{\mu\nu}E = \\
&= -\varepsilon_{0123}J_{23}E + \varepsilon_{1302}J_{02}E = -E(J_{23} + J_{02}) = -E\mathscr{R}_1 \\
&W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{2\rho\mu\nu}P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{20\mu\nu}J^{\mu\nu}E - \frac{1}{2}\varepsilon_{23\mu\nu}J^{\mu\nu}E = \\
&= -\varepsilon_{2013}J_{13}E + \varepsilon_{2301}J_{01}E = E(J_{13} + J_{01}) = E\mathscr{R}_2 \\
&W_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{3\rho\mu\nu}P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{30\mu\nu}J^{\mu\nu}E = \varepsilon_{3012}J^{12}E = -EJ_{12}
\end{aligned}$$

Итак

$$W_1 = -E\mathscr{R}_1, \qquad W_2 = -E\mathscr{R}_2, \qquad W_3 = -EJ_{12} \tag{189}$$

где

$$\mathscr{R}_1 = J_{23} + J_{02}, \qquad \mathscr{R}_2 = J_{13} + J_{01} \tag{190}$$

Установим коммутационные соотношения между операторами $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, J_{12}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&[\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2] = -\frac{1}{E^2}[W_1, W_2] = \frac{i}{E^2}\varepsilon_{12\mu\nu}W^\mu P^\nu = \frac{i}{E}(\varepsilon_{12\mu0}W^\mu - \varepsilon_{12\mu3}W^\mu) = \\
&= \frac{i}{E}(-\varepsilon_{1230}W_3 - \varepsilon_{1203}W_0) = \frac{i}{E}(\varepsilon_{0123}W_3 - \varepsilon_{0123}W_0) = \frac{i}{E}(W_3 - W_0) = 0
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение (188).

$$
\begin{aligned}
&[J_{12}, \mathscr{R}_1] = -\frac{1}{E^2}[W_1, W_3] = \frac{i}{E^2}\varepsilon_{13\mu\nu}W^\mu P^\nu = \frac{i}{E}\varepsilon_{13\mu0}W^\mu = \\
&= -\frac{i}{E}\varepsilon_{1320}W_2 = -\frac{i}{E}\varepsilon_{0123}W_2 = -\frac{i}{E}W_2 = -i\mathscr{R}_2 \\
&[J_{12}, \mathscr{R}_2] = \frac{1}{E^2}[W_2, W_3] = -\frac{i}{E^2}\varepsilon_{23\mu\nu}W^\mu P^\nu = -\frac{i}{E}\varepsilon_{23\mu0}W^\mu = \\
&= -\frac{i}{E}\varepsilon_{2310}W_1 = -\frac{i}{E}W_1 = i\mathscr{R}_1
\end{aligned}
$$

Итак

$$
\begin{aligned}
&[\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2] = 0 \\
&[J_{12}, \mathscr{R}_1] = -i\mathscr{R}_2 \\
&[J_{12}, \mathscr{R}_2] = i\mathscr{R}_1
\end{aligned}
\tag{191}
$$

Известно, что коммутационные соотношения (191) задают алгебру Ли группы E_2 изометрий или движений двумерной плоскости. Эта алгебра содержит трансляции, генерируемые операторами $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$, и вращение, генерируемое оператором J_{12}.

Запишем оператор Казимира C_2 в пространстве V_q. Имеем

$$
C_2 = W^\mu W_\mu = W_0^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = -(W_1^2 + W_2^2) = -\frac{i}{E}({\mathscr{R}_1}^2 + {\mathscr{R}_2}^2) \tag{192}
$$

Здесь учтено, что $W_0 = W_3$. Равенство (192) очевидно согласуется с тем, что единственным оператором Казимира группы E_2 является ${\mathscr{R}_1}^2 + {\mathscr{R}_2}^2$. Таким образом, нахождение неприводимого представления малой группы сводится к задаче на собственные значения для оператора ${\mathscr{R}_1}^2 + {\mathscr{R}_2}^2$.

В любом неприводимом представлении оператор ${\mathscr{R}_1}^2 + {\mathscr{R}_2}^2$ действует как оператор умножения на константу, которую мы обозначим ρ^2. Поскольку операторы $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ коммутируют с ${\mathscr{R}_1}^2 + {\mathscr{R}_2}^2$, то базис неприводимого представления можно выбрать в виде собственных векторов $|\rho_1, \rho_2>$ для операторов $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$. То есть

$$
\mathscr{R}_1|\rho_1, \rho_2> = \rho_1|\rho_1, \rho_2>
$$

$$\mathscr{R}_2|\rho_1, \rho_2 >= \rho_2|\rho_1, \rho_2 >$$

При этом $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2 = const$. Числа ρ_1, ρ_2 ограничены только последним соотношением, поэтому при $\rho^2 > 0$ операторы $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ имеют непрерывный спектр и представление малой группы является бесконечномерным. При рассмотрении массивных представлений в разделе 1.7.2 мы видели, что представление малой группы было конечномерным и связано с понятием спина элементарной системы. Поэтому предположим, что и в безмассовом случае физически приемлемые представления малой группы должны быть также конечномерными. В качестве обоснования отметим, что бесконечномерным представлением малой группы не соответствует ни одна наблюдаемая физическая система.

Итак, мы требуем, чтобы подпространство V_q было конечномерным. Единственная возможность, отвечающая этому требованию получается при $\rho = 0$. Тогда и $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ и в рассматриваемом подпространстве операторы $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ обращаются в ноль вместе с W_1, W_2 (см. (189)). При этом $W^2 = 0$. В результате малая группа H_q генерируется единственным оператором J_{12} и значит является абелевой и представляет собой группу вращений плоскости $SO(2) \sim U(1)$. Представления этой группы хорошо известны, мы далее рассмотрим только качественные соображения.

Поскольку малая группа является абелевой группой Ли, все ее неприводимые представления одномерны и характеризуются одним вещественным параметром. Пусть $|\lambda >$ - собственный вектор оператора J_{12},

$$J_{12}|\lambda >= -\lambda|\lambda > \tag{193}$$

В каждом неприводимом представлении параметр λ принимает фиксированное значение. Выясним какие конкретно значения λ возможны. Оператор J_{12} является генератором вращения по окружности, тогда соответствующий элемент группы вращений $SO(2)$, отвечающий повороту на угол φ, есть $e^{i\varphi J_{12}}$. Тогда

$$e^{i\varphi J_{12}}|\lambda >= e^{i\lambda\varphi}|\lambda > \tag{194}$$

Совершим полный оборот на угол 2π. В правой части соотношения (194) Получим $e^{2\pi i\lambda}|\lambda >$. Вращение на угол 2π отвечает тождественному преобразованию в группе Лоренца. Мы будем реализовывать группу

Пуанкаре в пространстве спин-тензорных полей, связанных с группой $SL(2|\mathbb{C})$. При этом как отмечалось ранее каждой матрице $\Lambda \in L_+^\uparrow$ соответствуют две матрицы $\pm N \in SL(2|\mathbb{C})$. В частности, тождественному преобразованию в группе Лоренца отвечают две матрицы E и $-E$ в группе $SL(2|\mathbb{C})$, где E -единичная 2×2 матрица. Это значит, что тождественному преобразованию Лоренца отвечает условие $e^{2\pi i\lambda} = \pm 1$. Отсюда $\lambda = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \ldots$ и $\lambda = 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2}, -\ 2,\ \ldots$ или

$$\lambda = |\lambda|\sigma \tag{195}$$

где

$$\begin{aligned} &|\lambda| = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \ldots \\ &\sigma = \pm 1 \end{aligned} \tag{196}$$

Параметр λ спиральностью элементарной системы.

Таким образом, неприводимое представление малой группы для безмассовых элементарных систем характеризуются параметром λ. Все такие представления одномерны. При этом если $\lambda \neq 0$, то неприводимые представления существуют всегда парами, то есть, если есть представление с параметром λ, то есть и представление с параметром $-\lambda$.

В результате мы построили неприводимые представления с базисными векторами $|0, \pm\lambda, q>$. Здесь первый аргумент 0 означает нулевую массу. Импульс $q_\mu = (E, 0, 0, E)$. Базис неприводимого представления, отвечающий произвольному импульсу p_μ, $p^2 = 0$ получается из векторов $|0, \pm\lambda, q>$ действием операторов $U(\Lambda)$. Поэтому в общем случае базис неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре класса (0_+) составляют векторы $|0, \pm\lambda, q>$, где $p^2 = 0$. Неприводимое представление характеризуется спиральностью λ, принимающей целые и полуцелые, положительные и отрицательные значения. Иногда параметр $|\lambda|$ называют спином безмассовой элементарной системы. Обратим внимание на отличие понятий спина массивной системы и спиральности безмассовой. В массивном случае при фиксированном значении импульса p_μ и спина s размерность неприводимого представления есть $2s + 1$. В безмассовом случае при фиксированном импульсе p_μ ($p^2 = 0$) неприводимое представление одномерно и задается параметром λ. Если $\lambda \neq 0$, то здесь всегда имеется два разных неприводимых представления, отвечающих спиральностям λ и $-\lambda$.

Пусть физическая система инвариантна относительно пространственного отражения, которое является одним из элементов группы Лоренца. При преобразовании $x^i \to -x^i$, оператор J_{12} меняет знак, что соответствует преобразованию $\lambda \to -\lambda$. Если потребовать, чтобы рассматриваемые представления были неприводимы относительно пространственных отражений, то надо два представления со спиральностями λ и $-\lambda$ объединить в одно двумерное представление. Обычно это обстоятельство всегда подразумевается (хотя если исключения, связанные с нарушением четности в слабых взаимодействиях). Поэтому говорят, что безмассовые элементарные системы имеют два состояния поляризации, отвечающие спиральностям $|\lambda|$ и $-|\lambda|$.

9.4 Оператор спиральности

Рассмотрим безмассовое неприводимое представление. Мы покажем, что в этом случае существует особый оператор, коммутирующий со всеми генераторами группы Пуанкаре.

В безмассовом представлении $p^2 = 0$. Кроме того, согласно результатам раздела 1.7.2 $W^2 = 0$. Ранее мы установили тождество $W^\mu P_\mu = 0$ (56). Три соотношения $W^2 = 0$, $P^2 = 0$, $W^\mu P_\mu = 0$ означают, что

$$W_\mu = hP_\mu \tag{197}$$

где h некоторый оператор. Действительно, пусть векторы X_μ Y_μ удовлетворяет условиям $X^2 = 0$, $Y^2 = 0$, $X^\mu Y_\mu = 0$. Выберем систему отсчета, где $X_\mu = a(1,0,0,1)$, $a \neq 0$. Тогда условие $X^2 = 0$ автоматически выполняется. Рассмотрим $Y^\mu X_\mu = a(Y_0 - Y_3) = 0$, отсюда $Y_0 = Y_3$. Условие $W^2 = 0$ записывается в виде ${Y_0}^2 - {Y_1}^2 - {Y_2}^2 - {Y_3}^2 = -({Y_1}^2 + {Y_2}^2) = 0$. Отсюда $Y_1 = Y_2 = 0$. Тогда $Y_\mu = Y_0(1,0,0,1) = \frac{Y_0 a}{a}(1,0,0,1)$. Поэтому X_μ и Y_μ пропорциональны, $X_\mu = kY_\mu$. Поскольку последнее соотношение векторное, то оно выполняется в любой системе отсчета. В результате мы приходим к равенству (197).

Из (197) имеем

$$h = W_0 P_0^{-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk} P^i J^{jk} P_0^{-1} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk} J_{jk} P_i P_0^{-1}$$

Обозначим

$$J_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk} J_{jk} \tag{198}$$

Тогда

$$h = \frac{\vec{P}\vec{J}}{P_0} \tag{199}$$

Заметим, что согласно (57) $[W_\mu, P_\nu] = 0$. Поэтому P_0 коммутирует W_0 и значит $[P_0, \vec{J}] = 0$. Следовательно оператор P_0 коммутирует с оператором $\vec{P}\vec{J}$ и значит оператор P_0^{-1} может быть расположен с любой стороны в соотношении (199).

Покажем, что оператор h коммутирует с P_μ и $J_{\mu\nu}$. Соотношение $[h, P_\mu] = 0$ следует из тождеств $[W_0, P_\mu] = 0$ и $P_0 = |\vec{P}|$ для безмассового случая. Рассмотрим вычисление $[h, P_\mu]$. Запишем очевидное тождество

$$0 = [P_0 P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = [P_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} + P_0 [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}]$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] &= -P_0^{-1}[P_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} = \\ &= i P_0^{-1}(\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-1} = i(\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-2} \end{aligned} \tag{200}$$

Значит

$$\begin{aligned} [h, J_{\mu\nu}] &= [W_0 P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = [W_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} + W_0 [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = \\ &= i(\eta_{0\mu} W_\nu - \eta_{0\nu} W_\mu) P_0^{-1} + i W_0 (\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-2} = \\ &= \frac{i}{P_0}\left[\eta_{0\mu}(W_\nu - W_0 \frac{P_\nu}{P_0}) - \eta_{0\nu}(W_\mu - W_0 \frac{P_\mu}{P_0})\right] \end{aligned}$$

Но $W_\mu = hP_\mu$ Тогда

$$[h, J_{\mu\nu}] = \frac{i}{P_0} \left[\eta_{0\mu}(hP_\nu - hP_\mu) - \eta_{0\nu}(hP_\mu - hP_\mu)\right] = 0$$

Итак

$$[h, J_{\mu\nu}] = 0 \tag{201}$$

Таким образом, оператор h, построенный по правилу (199) в неприводимом безмассовом представлении коммутирует со всеми генераторами P_μ, $J_{\mu\nu}$. Следовательно в этом представлении он действует как оператор умножения на константу

$$h|\lambda >= \lambda|\lambda > \tag{202}$$

Установим какие значения принимает параметр λ. Согласно определению (199) оператор h инвариантен относительно трехмерных вращений и значит его собственные значения не зависят от выбора направления в трехмерном пространстве. Повернем систему координат так, чтобы ось z , была направлена вдоль вектора $\vec{P}$. В этой системе координат $\vec{P} = (0, 0, |\vec{P}|)$ и значит

$$h = J_3 = -J_{12} \tag{203}$$

Как мы уже отмечали, оператор J_{12} это генератор одномерных вращений и его собственные значения есть $-\lambda$, где λ представляет собой спиральность. Поскольку собственными значениями оператора h является спиральность, то естественно называть этот оператор - оператором спиральности.

Заметим, что в общем случае $P_0 = |\vec{P}|$. Тогда оператор спиральности можно переписать так

$$h = \vec{J}\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \vec{J}\vec{n} \tag{204}$$

В физических приложениях $\vec{P}$ есть трехмерный импульс системы, а $\vec{J}$ ее момент импульса (угловой момент). Вектор $\vec{n}$ - это единичный вектор вдоль направления трехмерного импульса, то есть вдоль направления движения. Поэтому спиральность представляет собой проекцию углового момента на направление движения. Поскольку спиральность λ принимает всегда два значения $|\lambda|$ $-|\lambda|$, то в безмассовых элементарных системах угловой момент всегда направлен либо по направлению движения либо противоположно направлению движения. Исключением является случай нулевой спиральности.

9.5 Неприводимые представления группы Пуанкаре в пространстве спин-тензорных полей

Пусть спин-тензор определен в каждой точке пространства Минковского. В этом случае говорим, что задано спин-тензорное поле.

Рассмотрим неоднородное представление Лоренца $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$ и пусть $\varphi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}(x)$ спин-тензорное поле. Компоненты спин-тензорного преобразуются относительно неоднородных преобразований Лоренца в виде

$$\varphi'_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}(x') = N_{a_1}{}^{b_1} \dots N_{a_n}{}^{b_n} N^*{}_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1} \dots N^*{}_{\dot{a}_m}{}^{\dot{b}_m} \varphi_{b_1 \dots b_n \dot{b}_1 \dots \dot{b}_m}(x)$$

Неприводимое представление группы Лоренца задается в пространстве полностью симметричных по неточечным и точечным индексам спин-тензорных полей вида $\varphi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}(x)$ которые для краткости будем обозначать $\varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x)$. Закон преобразования запишем в форме:

$$\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x') = R_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} \varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x) \qquad (205)$$

где обозначено

$$R_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} = N_{(a_1}{}^{(b_1} \dots N_{a_n)}{}^{b_n)} N^*{}_{(\dot{a}_1}{}^{(\dot{b}_1} \dots N^*{}_{\dot{a}_m)}{}^{\dot{b}_m)} \qquad (206)$$

Из соотношения $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$ следует, что $x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}(x'^{\nu} - a^{\mu})$. В соотношении (205) выразим x^{μ} через x'^{μ} согласно последнему соотношению, а потом переобозначим x'^{μ} на x^{μ}. Получим

$$\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x) = R_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} (\Lambda^{-1})(x - a) \qquad (207)$$

Найдем бесконечно малую форму соотношения (207). Запишем $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ и $R_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} = \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}$. Здесь $S_{\mu\nu}$ - генераторы группы Лоренца в спин-тензорном представлении. Тогда из соотношения (207) в первом порядке по бесконечно малым параметрам $\omega^{\mu\nu}$ и a^{μ} получим

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x) &= (\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}(\varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x) - \\
&- a^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x) - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x)) = \\
&= \varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x) + ia^{\mu}P_{\mu}\varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x) + \\
&+ \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(J_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}\varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x)
\end{aligned}
\tag{208}
$$

Здесь

$$
(P_{\mu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} = \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}}i\partial_{\mu} \tag{209}
$$

$$
\begin{aligned}
(J_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} &= \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}}(\eta_{\nu\lambda}x^{\lambda}i\partial_{\mu} - \eta_{\mu\lambda}x^{\lambda}i\partial_{\nu}) + \\
&+ (S_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}
\end{aligned}
\tag{210}
$$

Соотношение (208) задает преобразование спин-тензорного поля при бесконечно малых неоднородных преобразованиях Лоренца. Оператор P_{μ} (209) есть генератор трансляций, а оператор $J_{\mu\nu}$ (210) есть генератор лоренцевских вращений в спин-тензорном представлении. При этом

$$
J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}
$$

где

$$
L_{\mu\nu} = \mathbf{1}(\eta_{\nu\lambda}x^{\lambda}P_{\mu} - \eta_{\mu\lambda}x^{\lambda}P_{\nu}) \tag{211}
$$

Из (208) видно, что $S_{\mu\nu}$ - это вклад в оператор $J_{\mu\nu}$, обусловленный преобразованием компонент спин-тензора при фиксированных координатах x^{μ}.

Наша цель состоит в нахождении условий при которых спин-тензорное поле соответствует неприводимому представлению группы Пуанкаре. Мы не будем изучать подробно общий случай, а рассмотрим только основные частные случаи:

а Пусть число точечных и неточечных индексов спин тензора совпадали. В этом случае спин-тензор можно конвертировать в тензор вида $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}$. Условие того, что этот тензор соответствует неприводимому представлению группы Лоренца есть $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n} = \varphi_{(\mu_1\ldots\mu_n)}$ и $\eta^{\mu_1\mu_n}\varphi_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n} = 0$. То есть рассматриваемый тензор должен быть полностью симметричным и бесследовым.

Пусть $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)$ полностью симметричное бесследовое тензорное поле. При неоднородных преобразованиях Лоренца оно преобразуется в соответствии с общим выражением (208) в виде

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) &= ia^\mu(P_\mu)_{\mu_1\ldots\mu_n}{}^{\nu_1\ldots\nu_n}\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}(x) + \\
&+ \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(J_{\mu\nu})_{\mu_1\ldots\mu_n}{}^{\nu_1\ldots\nu_n}\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}(x)
\end{aligned} \tag{212}$$

Здесь

$$(P_\mu)_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} = \delta_{(\mu_1}{}^{\nu_1}\ldots\delta_{\mu_n)}{}^{\nu_n}i\partial_\mu \tag{213}$$

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{214}$$

где $L_{\mu\nu}$ имеет вид (211), а явный вид генератора $S_{\mu\nu}$ зависит от ранга тензорного поля $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)$.

Дальнейшее рассмотрение проводится следующим образом. Используя выражения P_μ (213) и $J_{\mu\nu}$ (214) построим оператор Казимира W^2 и подействуем им на тензорное поле $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)$. Согласно рассмотренной выше общей теории, в неприводимом массивном представлении результат действия оператора Казимира есть $-m^2 s(s+1)$, где s - спин, отвечающий данному неприводимому представлению. Мы не будем проводить общий анализ, а ограничимся только векторным полем $\varphi^\mu(x)$. Обобщение на произвольное тензорное поле будет очевидным.

В случае векторного поля $\varphi^\mu(x)$ явный вид генератора $J_{\mu\nu}$ был получен в разделе 1.6:

$$\begin{aligned}
(J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= (L_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu + (S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \\
(L_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu(\eta_{\beta\lambda}x^\lambda P_\alpha - \eta_{\alpha\lambda}x^\lambda P_\beta) \\
(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= i(\delta_\beta{}^\mu\eta_{\alpha\nu} - \delta_\alpha{}^\mu\eta_{\beta\nu})
\end{aligned} \tag{215}$$

и согласно (213)

$$(P_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \ = \ \delta^{\mu}{}_{\nu} i\partial_{\alpha} \qquad (216)$$

Введем вектор Паули-Любаньского

$$\begin{aligned} W_{\mu} \ &= \ \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^{\alpha}J^{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^{\alpha}(L^{\beta\gamma}+S^{\beta\gamma}) = \\ &= \ \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^{\alpha}(x^{\gamma}P^{\beta}-x^{\beta}P^{\gamma}+S^{\beta\gamma}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^{\alpha}S^{\beta\gamma} \qquad (217) \end{aligned}$$

Поэтому оператор Казимира имеет вид

$$W^2 \ = \ W^{\mu}W_{\mu} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}P_{\alpha}S_{\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}P^{\lambda}S^{\rho\sigma} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}P_{\alpha}P^{\lambda}S_{\beta\gamma}S^{\rho\sigma}$$

Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} \ &= \ -det\begin{pmatrix} \delta^{\alpha}{}_{\lambda} & \delta^{\alpha}{}_{\rho} & \delta^{\alpha}{}_{\sigma} \\ \delta^{\beta}{}_{\lambda} & \delta^{\beta}{}_{\rho} & \delta^{\beta}{}_{\sigma} \\ \delta^{\gamma}{}_{\lambda} & \delta^{\gamma}{}_{\rho} & \delta^{\gamma}{}_{\sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \ -(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} + \\ &+ \ \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\lambda} + \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\lambda}) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W^2 \ &= \ -\frac{1}{4}(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} + \\ &+ \ \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\lambda} + \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\lambda})S_{\beta\gamma}S^{\rho\sigma}P_{\alpha}P^{\lambda} = \\ &= \ -\frac{1}{4}(S_{\beta\gamma}S^{\beta\gamma}P_{\alpha}P^{\alpha} - S_{\beta\gamma}S^{\gamma\beta}P_{\alpha}P^{\alpha} - S_{\beta\gamma}S^{\alpha\gamma}P_{\alpha}P^{\beta} + \\ &+ \ S_{\beta\gamma}S^{\alpha\beta}P_{\alpha}P^{\gamma} + S_{\beta\gamma}S^{\gamma\alpha}P_{\alpha}P^{\beta} - S_{\beta\gamma}S^{\beta\alpha}P_{\alpha}P^{\gamma}) = \\ &= \ -\frac{1}{2}(S_{\beta\gamma}S^{\beta\gamma}P^2 + S_{\beta\gamma}S^{\alpha\beta}P_{\alpha}P^{\gamma} + S_{\beta\gamma}S^{\gamma\alpha}P_{\alpha}P^{\beta}) \qquad (218) \end{aligned}$$

Теперь подействуем этим оператором на векторное поле $\varphi^\mu(x)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&(S_{\beta\gamma}S^{\beta\gamma})\varphi^\mu = \\
&= (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\beta\gamma})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma{}^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta{}^\mu \eta_{\gamma\lambda})(\eta^{\gamma\lambda}\delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\lambda}\delta^\gamma{}_\nu)\varphi^\nu = \\
&= -(\delta^\mu{}_\nu - 4\delta^\mu{}_\nu - 4\delta^\mu{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu)\varphi^\nu = 6\delta^\mu{}_\nu\varphi^\nu = 6\varphi^\mu \\
&(S_{\beta\gamma}S^{\alpha\beta})\varphi^\mu = \\
&= (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\alpha\beta})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma{}^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta{}^\mu \eta_{\gamma\lambda})(\eta^{\beta\lambda}\delta^\alpha{}_\nu - \eta^{\alpha\lambda}\delta^\beta{}_\nu)\varphi^\nu = \\
&= -(4\delta^\mu{}_\gamma\delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\gamma\delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\gamma\delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu\delta^\alpha{}_\gamma)\varphi^\nu = \\
&= -(2\delta^\mu{}_\gamma\delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu\delta^\alpha{}_\gamma)\varphi^\nu \\
&(S_{\beta\gamma}S^{\gamma\alpha})\varphi^\mu = \\
&= (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\gamma\alpha})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma{}^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta{}^\mu \eta_{\gamma\lambda})(\eta^{\alpha\lambda}\delta^\gamma{}_\nu - \eta^{\gamma\lambda}\delta^\alpha{}_\nu)\varphi^\nu = \\
&= -(\delta^\mu{}_\nu\delta^\alpha{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\beta\delta^\alpha{}_\nu + 4\delta_\beta{}^\mu\delta^\alpha{}_\nu)\varphi^\nu = \\
&= -(2\delta^\mu{}_\beta\delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu\delta^\alpha{}_\beta)\varphi^\nu
\end{aligned}
$$

С учетом этих равенств

$$
\begin{aligned}
W^2\varphi^\mu &= -\frac{1}{2}\left(6P^2\varphi^\mu - 2P^\mu P_\alpha\varphi^\alpha - P^2\varphi^\mu - 2P^\mu P_\alpha\varphi^\alpha - P^2\varphi^\mu\right) = \\
&= -2P^2\varphi^\mu + 2P^\mu P_\alpha\varphi^\alpha \qquad (219)
\end{aligned}
$$

В пространстве неприводимого представления должно выполняться

$$
W^2\varphi^\mu = -m^2 s(s+1)\varphi^\mu \qquad (220)
$$

где s - спин, соответствующий векторному полю. В рассматриваемом представлении $P_\mu = i\partial_\mu$. Поэтому $P^2 = -\partial^\mu\partial_\mu = -\Box$. Соотношение (219) перепишется так

$$
W^2\varphi^\mu = -2(-\Box\varphi^\mu) - 2\partial^\mu\partial_\nu\varphi^\nu
$$

Потребуем выполнение соотношений

$$
\begin{aligned}
&\Box\varphi^\mu - m^2\varphi^\mu = 0 \\
&\partial_\nu\varphi^\nu = 0 \qquad (221)
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
W^2\varphi^\mu = -m^2 1(1+1)\varphi^\mu \qquad (222)
$$

Сравнивая (222) с (220) заключаем, что $s = 1$. Условие $P^2\varphi^\mu = m^2\varphi^\mu$, это одно из условий массивного неприводимого представления. Таким образом, векторное поле соответствует неприводимому массивному представлению группы Пуанкаре при выполнении дополнительного условия (221). Первое из этих условий означает, что каждая компонента векторного поля удовлетворяет уравнению Клейна -Гордона. Второе условие, означает, что дивергенция векторного поля обращается в ноль.

Анализ для произвольного тензорного поля $\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)$ проводится аналогично. Поскольку рассматривается только полностью симметричный тензор, то часть вычислений достаточно провести только для одного индекса, зафиксировав все остальные. Тогда задача по существу сводится к рассмотренному выше векторному полю и дает $(\Box + m^2)\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = 0$, $\partial_{\mu_1}\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = 0$. Первое из этих условий - это условие, определяющее неприводимое массивное представление. Учет остальных индексов в соотношении для $W^2\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}$ приводит к результату

$$W^2\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n} = -m^2 n(n+1)\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{223}$$

Причем имеет место условия

$$\begin{aligned}
&\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = \varphi^{(\mu_1\cdots\mu_n)}(x)\\
&(\Box + m^2)\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = 0\\
&\eta^{\mu_1\mu_2}\varphi_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}(x) = 0\\
&\partial_{\mu_1}\varphi^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = 0
\end{aligned} \tag{224}$$

Соотношение (223) показывает, что при выполнении дополнительных условий (224) тензорное поле n-го ранга описывает неприводимое массивное представление группы Пуанкаре.

<u>b</u> Перейдем теперь к рассмотрению спин-тензорных полей вида $\varphi_{(a_1\ldots a_n\ a)(\dot a_1\ldots\dot a_n)}(x)$ и $\chi_{(a_1\ldots a_n)(\dot a_1\ldots\dot a_n\ \dot a)}(x)$. Эти поля соответствуют неприводимым представлениям группы Лоренца $\left(\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}\right)$ и $\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}\right)$ соответственно. В двух этих случаях число неточечных и точечных индексов отличается на единицу. В соответствии с правилом (133), каждой паре спинорных индексов - неточечному и точечному соответствует векторный индекс. Проведя конверсию спинорных индексов в векторные получим $\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n \; a}(x)$ и $\chi_{\mu_1 \ldots \mu_n \; \dot{a}}(x)$. Эти выражения называются тензорными спинорами.

Выясним при каких условиях тензорные спиноры реализуют неприводимое массивное представление группы Пуанкаре. Начнем с простого случая, когда $n = 0$, то есть изучим $\varphi_a(x)$ и $\chi_{\dot{a}}(x)$. Для этого надо подействовать на данные поля операторами Казимира и найти их собственные значения. Во-первых заметим, что одним из операторов Казимира является P^2. В спин-тензорном представлении $P_\mu = i\partial_\mu$. Поэтому условие $P^2\varphi_a = m^2\varphi_a$ принимает вид

$$(\Box + m^2)\varphi_a(x) = 0 \tag{225}$$

Аналогично

$$(\Box + m^2)\chi_{\dot{a}}(x) = 0 \tag{226}$$

То есть каждая из компонент $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ должна удовлетворять уравнению Клейна-Гордона.

Обратимся ко второму оператору Казимира $W^2 = W^\mu W_\mu$. Вектор Паули-Любаньского имеет вид

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^\alpha J^{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^\alpha S^{\beta\gamma}$$

Все вычисления для простоты проводим в системе отсчета, где $P_\alpha = (m, 0, 0, 0)$. Тогда

$$W_\mu = \frac{m}{2}\varepsilon_{\mu 0 ij}S^{ij} = \frac{m}{2}\varepsilon_{\mu 0 ij}S_{ij}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &W_0 = 0 \\ &W_i = \frac{m}{2}\varepsilon_{i0jk}S_{jk} = -\frac{m}{2}\varepsilon_{ijk}S_{jk} \end{aligned} \tag{227}$$

Поэтому

$$W^2 = -{W_1}^2 - {W_2}^2 - {W_3}^2 = -\frac{m^2}{4}\;\varepsilon_{ijk}S_{jk}\;\varepsilon_{imn}S_{mn}$$

Займемся преобразованием этого выражения. Используем тождество

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Тогда

$$\begin{aligned} W^2 &= -\frac{m^2}{4}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})S_{jk}\ S_{mn} = \\ &= -\frac{m^2}{4}(S_{jk}S_{jk} - S_{jk}S_{kj}) = -\frac{m^2}{2}S_{jk}S_{jk} \end{aligned}$$

Ранее было показано, что генераторы группы Лоренца в фундаментальном представлении есть $S_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}$. Тогда

$$W^2\varphi_a = \frac{m^2}{2}(\sigma_{jk})_a{}^b(\sigma_{jk})_b{}^c\varphi_c \tag{228}$$

Рассмотрим

$$\sigma_{jk}\sigma_{jk} = \frac{1}{16}(\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j)(\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j) = \frac{1}{8}(\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j\sigma_j\tilde{\sigma}_k)$$

Выражение $\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k$ преобразуем так

$$\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k = \sigma_j(\underbrace{\tilde{\sigma}_k\sigma_j + \tilde{\sigma}_j\sigma_k}_{-2\delta_{ik}})\tilde{\sigma}_k - \sigma_j\tilde{\sigma}_j\tilde{\sigma}_k\sigma_k\tilde{\sigma}_k = -2\sigma_j\tilde{\sigma}_j - \sigma_j\tilde{\sigma}_j\tilde{\sigma}_k\sigma_k\tilde{\sigma}_k$$

Из тождества $\sigma_i\tilde{\sigma}_j + \sigma_j\tilde{\sigma}_i = -2\delta_{ij}\sigma_0$ следует, что $\sigma_j\tilde{\sigma}_j + \sigma_j\tilde{\sigma}_j = -2\delta_{ii}\sigma_0$ или $\sigma_j\tilde{\sigma}_j = -3\sigma_0$. Тогда $\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k = 6\sigma_0 - 9\sigma_0 = -3\sigma_0$. Далее $\sigma_k\tilde{\sigma}_j\sigma_j\tilde{\sigma}_k = \sigma_k(\tilde{\sigma}_j\sigma_j)\tilde{\sigma}_k = -3\sigma_k\tilde{\sigma}_k = 9\sigma_0$. В результате

$$\sigma_{jk}\sigma_{jk} = \frac{1}{8}(-3\sigma_0 - 9\sigma_0) = -\frac{3}{2}\sigma_0$$

Поэтому

$$W^2\varphi_a = -\frac{3m^2}{4}\varphi_a = -m^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\varphi_a \tag{229}$$

Отсюда следует, что полю $\varphi_a(x)$ соответствует спин $s = \frac{1}{2}$. Аналогичным образом показывается, что полю $\chi_{\dot{a}}(x)$ также соответствует спин $s =$

$\frac{1}{2}$. Таким образом, при выполнении условий (225), (226) поля $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ соответствуют неприводимым массивным представлениям группы Пуанкаре.

Анализ общего случая является достаточно трудоемким и мы приведем только окончательные результаты. Тензорные спиноры описывают неприводимое массивное представление группы Пуанкаре со спином $s = n + \frac{1}{2}$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n\ a}(x) = 0\\
&\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n\ a}(x) = \varphi_{(\mu_1\ldots\mu_n)\ a}(x)\\
&\eta^{\mu_1\mu_2}\varphi_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n\ a}(x) = 0\\
&\partial^{\mu_1}\varphi_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\ a}(x) = 0\\
&(\tilde{\sigma}^{\mu_1})^{\dot{a}a}\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n\ a}(x) = 0
\end{aligned} \tag{230}$$

Условия на $\chi_{\dot{a}}(x)$ получаются из (230) заменой $\varphi_a(x)$ на $\chi_{\dot{a}}(x)$ и заменой $(\tilde{\sigma}^{\mu_1})^{\dot{a}a}$ на $(\sigma^{\mu_1})^{a\dot{a}}$ в последнем из соотношений (230). Это последнее соотношение называется условием сигма-бесследовости.

<u>c</u> Обратимся к безмассовым представлениям. Мы не будем проводить общий анализ, а ограничимся только векторным полем $A_\mu(x)$ и спинорами $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$. Условие $P^2 = 0$ дает $\Box\varphi_a(x) = 0$, $\Box\chi_{\dot{a}}(x) = 0$, $\Box A_\mu(x) = 0$. Наша цель состоит в том, чтобы выяснить какие спиральности соответствуют этим полям. Вычисления будем проводить в системе отсчета где импульс $P_\mu = (E, 0, 0, E)$.

Как было показано в разделе 1.7.3 в этой системе отсчета $W_1 = -E\mathscr{R}_1$, $W_2 = E\mathscr{R}_2$, $W_3 = -EJ_{12}$. При этом рассматриваются представления, в котором $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2 = 0$. Заметим, что ранее мы писали $W_3 = -EJ_{12}$, но поскольку $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$ и $L_{\mu\nu}$ выпадает из выражения для W_μ, то реально $W_3 = -ES_{12}$. Спиральность λ определяется как собственное значение оператора спиральности h, который в выбранной системе отсчета есть $-S_{12}$. Запишем $-S_{12}$ в явном виде, имеем $-S_{12} = i\sigma_{12} = -\frac{i}{4}(\sigma_1\tilde{\sigma}_2 - \sigma_2\tilde{\sigma}_1) = \frac{i}{4}(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1) = -\frac{i}{2}\sigma_3$. Отсюда

$$-S_{12} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{231}$$

Мы видим, что матрица $-S_{12}$ имеет два собственных значения $\pm\frac{1}{2}$. То есть полю $\varphi_a(x)$ соответствуют спиральности $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Аналогично показывается, что полю $\chi_{\dot{a}}(x)$ также соответствуют спиральности $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Таким образом, поля $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Box\varphi_a(x) = 0, \qquad \Box\chi_{\dot{a}}(x) = 0$$

описывают безмассовое представление со спиральностями $\pm\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь векторное поле. Условия $W^2 A_\mu = 0$ в (221) при $m^2 = 0$, дает

$$\begin{aligned} \Box A_\mu(x) &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu(x) &= 0 \end{aligned} \tag{232}$$

Выясним какие спиральности отвечают полю $A_\mu(x)$. Оператор $(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu$ в векторном представлении есть $i(\eta_{\beta\mu}\delta_\alpha{}^\nu - \eta_{\alpha\mu}\delta_\beta{}^\nu)$. Тогда оператор спиральности в выбранной системе отсчета имеет вид:

$$-(S_{12})_\mu{}^\nu = -i(\delta_1{}^\nu\eta_{2\mu} - \delta_2{}^\nu\eta_{1\mu})$$

Выпишем здесь явно матричные элементы. Ясно, что все диагональные матричные элементы обращаются в ноль. $(-S_{12})_i{}^1 = -i\eta_{2i} = i\delta_{2i}$, $(-S_{12})_i{}^2 = i\eta_{1i} = -i\delta_{1i}$, $(-S_{12})_0{}^\nu = 0$, $(-S_{12})_3{}^\nu = 0$. Таким образом

$$-S_{12} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения $(-S_{12})_\mu{}^\nu A_\nu = \lambda A_\mu$. Имеем

$$i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -A_2 \\ A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i\lambda \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Отсюда $A_0 = 0$, $A_3 = 0$, $A_2 = +i\lambda A_1$, $A_1 = -i\lambda A_2$. Из последних двух уравнений находим $A_2 = (-i\lambda)i\lambda A_2$ или $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Таким образом, безмассовому векторному полю соответствуют две спиральности $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$. В результате, при выполнении условий (232) векторное поле описывает два безмассовых неприводимых представления группы Пуанкаре со спиральностями $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Общий анализ показывает, что условия на поля, определяющие неприводимые безмассовые представления получаются из условий, определяющих массивные представления, если в последних положить $m = 0$.

10 Релятивистские волновые уравнения

Релятивистскими волновыми уравнениями называются лоренц-ковариантные линейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение полей, реализующих представления группы Пуанкаре. Они также называются уравнения движения свободных полей. Мы обсудим простейшие из таких уравнений.

10.1 Уравнение Клейна -Гордона

Рассмотрим вещественное скалярное поле $\varphi(x)$. Оно отвечает представлению $(0,0)$ группы Лоренца. Соответствующий генератор группы Лоренца в этом случае $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} = (x_\nu p_\mu - x_\nu p_\mu)$. это значит вектор Паули -Любаньского в скалярном представлении есть $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu J^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu(x^\beta P^\alpha - x^\alpha P^\beta) = 0$. Поэтому спин скалярного поля равен нулю.Условия определяющие массивное неприводимое представление $P^2 = m^2$ с учетом того, что в скалярном представлении $P_\mu = i\partial_\mu$ ведет к уравнению

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{233}$$

Это уравнение называется уравнением Клейна-Гордона. При нулевой массе из (233) следует волновое уравнение.

10.2 Уравнения Вейля

Рассмотрим спинорные поля $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$, преобразующихся по представлениям $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ группы Лоренца соответственно. Эти поля отвечают неприводимым безмассовым представлениям групп Пуанкаре со спиральностями $\pm\frac{1}{2}$ при выполнении условий

$$\Box\varphi_a(x) = 0$$
$$\Box\chi_{\dot{a}}(x) = 0$$

Очевидно, что для лоренц-ковариантные уравнения для $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ могут быть построены только из $\partial_\mu\varphi_a(x)$, $\partial_\mu\chi_{\dot{a}}(x)$ и инвариантных величин группы Лоренца σ_μ, $\tilde{\sigma}_\mu$, $\eta_{\mu\nu}$ и т.д. Простейшие уравнения которые формулируются в этих терминах есть

$$\begin{aligned} i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu\varphi_a = 0 \\ i(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\mu\chi^{\dot{a}} = 0 \end{aligned} \tag{234}$$

Покажем, что эти уравнения ведут к уравнениям Клейна-Гордона для каждой компоненты $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$. Подействуем на первое уравнение оператором $-i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu$, имеем

$$(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_b{}^a\partial_\nu\partial_\mu\varphi_a = 0$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu)_b{}^a\partial_\mu\partial_\nu\varphi_a = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_b = \Box\varphi_b = 0$$

Аналогично, действуя оператором $-i(\tilde{\sigma}^\nu)_{\dot{b}a}\partial_\nu$ на второе из уравнений (234), получим $\Box\chi_{\dot{a}} = 0$. Таким образом, уравнения (234) согласованы с условиями неприводимости $P^2 = 0$ для безмассовых элементарных систем. Эти уравнения называются уравнениями Вейля.

Ранее было показано, что вообще говоря безмассовые поля $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ содержат две спиральности. Однако математический факт, что эти поля удовлетворяют уравнениям первого порядка, накладывает дополнительные условия на отвечающие им спиральности. Рассмотрим уравнения Вейля для поля $\varphi_a(x)$ и совершим в нем преобразования Фурье

$$\varphi_a(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\varphi}_a(p)$$

Тогда получим

$$(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} p_\mu \tilde{\varphi}_a(p)$$

или

$$[(\tilde{\sigma}^0)^{\dot{a}a} p_0 + (\tilde{\sigma}^i)^{\dot{a}a} p_i] \tilde{\varphi}_a(p)$$

или

$$(\sigma^0 p_0 + (\tilde{\sigma^i}) p_i) \tilde{\varphi}_a(p) = 0$$

Отсюда

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \tilde{\varphi}_a(p) = -\tilde{\varphi}_a(p) \tag{235}$$

Здесь учтено, что $\tilde{\sigma}^i = -\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$ и что для безмассовых систем $p_0 = |\vec{p}|$. Покажем, что выражение $\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}$ связано с оператором спиральности в фундаментальном спинорном представлении. Согласно определению (199) оператор спиральности есть

$$h = \frac{\vec{J}\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Оператор $\vec{S}$ с компонентами S_i определен как

$$S_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{jk}$$

где $S_{jk} = -i(\sigma_{jk})$ - пространственные компоненты генератора лоренцовских вращений в спинорном представлении. Тогда

$$S_i = -\frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}(\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j) = +\frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}[\sigma_j, \sigma_k] =$$
$$= -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\sigma_l = -\frac{1}{4}\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jkl}\sigma_l \tag{236}$$

Но $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl} = \delta_{kk}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{ik} = 3\delta_{ie} - \delta_{ie} = 2\delta_{ie}$. Отсюда $S_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$. Поэтому

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}_0|} = -2\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|} = -2h$$

С учетом этого соотношения, уравнение (235) принимает вид

$$h\varphi_a(x) = \frac{1}{2}\varphi_a(x) \tag{237}$$

Таким образом, поле $\varphi_a(x)$, удовлетворяющее уравнению Вейля, содержит только одну спиральность $\lambda = \frac{1}{2}$. Другими словами уравнение Вейля описывает распространение неприводимого безмассового представления группы Пуанкаре со спиральностью $\lambda = \frac{1}{2}$.

Аналогичным образом можно показать, что уравнение Вейля для $\chi_{\dot{a}}(x)$ описывает распространение неприводимого безмассового представления группы Пуанкаре со спиральностью $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Заметим, что преобразование четности переводит представление $(\frac{1}{2}, 0)$ в представление $(0, \frac{1}{2})$ и наоборот. Поэтому каждое из уравнений Вейля не инвариантно относительно пространственных отражений.

10.3 Уравнение Дирака

Перейдем к построению релятивистского волнового уравнения для массивных представлений со спином $s = \frac{1}{2}$. Будем предполагать с самого начала, что искомое уравнение должно быть инвариантным относительно преобразования четности и поэтому включать два представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$. Таким образом, искомое уравнение может быть построено из спиноров $\varphi_a, \chi_{\dot{a}}$ производных ∂_μ, инвариантных объектов группы

Лоренца $\sigma, \tilde{\sigma}, \eta_{\mu\nu}$ и содержать массу m. Единственно возможный член с производной поля $\varphi(x)$ имеет тот же вид, что и в уравнении Вейля, $i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu \varphi_a(x)$. Ясно, что добавить к нему слагаемое линейное по полю $\varphi_a(x)$ и линейное по массе не возможно, поскольку нет соответствующих инвариантных объктов группы Лоренца. Это значит, что для построения необходимого уравнения следует помимо поля $\varphi_a(x)$ использовать поле $\chi_a(x)$. Аналогично, в уравнении для $\chi_a(x)$ следует использовать поле $\varphi_a(x)$. В результате мы приходим к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu \varphi_a(x) - m\chi^{\dot{a}}(x) = 0 \\ i(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\mu \chi^{\dot{a}}(x) - m\varphi_a(x) = 0 \end{aligned} \tag{238}$$

Докажем, что уравнения (239) приводят к правильным условиям массовой неприводимости $(\Box + m^2)\varphi_a = 0$, $(\Box + m^2)\chi_{\dot{a}} = 0$. Подействуем на первое из уравнений (239) оператором $-i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu$, получим

$$(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_b{}^a\partial_\nu\partial_\mu\varphi_a + im(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}} = 0 \tag{239}$$

Выражение $i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}}$ выразим из второго из уравнений (239) в виде

$$i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}} = m\varphi_b$$

и поставим в (239). Тогда получим

$$\frac{1}{2}(\underbrace{\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu}_{2\eta^{\mu\nu}\sigma_0})_b{}^a\partial_\nu\partial_\mu\varphi_a + m^2\varphi_b = 0$$

Отсюда $(\Box + m^2)\varphi_a(x) = 0$. Условие массовой неприводимости выполнено. Аналогичным образом можно показать, что из уравнений (239) следует $(\Box + m^2)\chi^{\dot{a}}(x) = 0$, то есть условие массовой неприводимости.

Таким образом, система уравнений (239) формирует релятивистское волновое уравнение для массивного поля со спином $s = \frac{1}{2}$. Обратим внимание, что в отличие от безмассового случая, уравнения (239) включают два неприводимых представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ группы Лоренца.

Систему уравнений (239) можно переписать в виде одного матричного уравнения

$$\left[i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\partial_\mu - m\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{240}$$

Введем четырехкомпонентный столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{241}$$

и матрицы размерности 4×4

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{242}$$

Тогда уравнение (240) примет вид

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \tag{243}$$

Уравнение (243) представляет собой основную форму записи релятивистского волнового уравнения для массивного поля со спином $s = \frac{1}{2}$. Оно называется уравнением Дирака. Матрица γ^μ (242) называется матрицами Дирака. Столбец ψ (241) называется дираковским спинором или биспинором

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\eta^{\mu\nu}\sigma_0 & 0 \\ 0 & 2\eta^{\mu\nu}\tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix} = 2\eta^{\mu\nu} I \end{aligned}$$

где I - единичная 4×4 матрица, Итак

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I. \tag{244}$$

Соотношение (244) выражает основное свойство матриц Дирака.

Выясним закон преобразования дираковского спинора при преобразованиях Лоренца. Известно, что

$$\delta\varphi_a = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(-i\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\varphi_b$$
$$\delta\chi^{\dot{a}} = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(-i\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\varphi^{\dot{b}}$$

Поэтому

$$\delta\psi = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\begin{pmatrix} -i\sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -i\tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\psi \tag{245}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu} &= -i\begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \frac{i}{4}(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu) & 0 \\ 0 & \frac{i}{4}(\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu\sigma_\mu) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \end{aligned} \tag{246}$$

Матрица $\Sigma_{\mu\nu}$ (246) представляет собой генератор преобразований Лоренца дираковских спиноров.

Пусть ψ-дираковский спинор. Введем четырехкомпонентную строку $\bar{\psi}$ по правилу

$$\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0} \tag{247}$$

Выражение $\bar{\psi}$ (246) называется дираковски сопряженным спинором. Выразим компоненты $\bar{\psi}$ через компоненты биспинора ψ. Запишем

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\bar{\psi} = ((\varphi_a)^*, (\chi^{\dot{a}})^*)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = ((\chi^{\dot{a}})^*, (\varphi_a)^*)$$

Обозначим

$$\bar{\chi}^a = (\chi^{\dot{a}})^*, \qquad \bar{\varphi}_{\dot{a}} = (\varphi_a)^*$$

Тогда

$$\bar{\psi} = (\bar{\chi}^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}}) \tag{248}$$

При этом

$$\bar{\psi}\psi = (\chi^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}})\begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \chi^a\varphi_a + \bar{\varphi}_{\dot{a}}\chi^{\dot{a}} \tag{249}$$

Ранее было показано, что каждое из слагаемых в правой части (246) является лоренц-инвариантом. Поэтому и выражение $\bar{\psi}\psi$ есть лоренц-инвариант.

Найдем уравнение для дираковски сопряженного спинора. Совершим эрмитово сопряжение уравнения (246), получим

$$-i\partial_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ - m\psi^+ = 0.$$

Умножим это уравнение справа на матрицу γ^0 и учтем, что $(\gamma^0)^2 = I$. Тогда $\psi^+ = \bar{\psi}\gamma^0$. В итоге уравнение примет вид

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0 + m\bar{\psi} = 0$$

Найдем $\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0$. Имеем $(\gamma^0)^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0$, поскольку $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$ - единичная 2×2 матрица. Поэтому $\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0$.

$$(\gamma^i)^+ = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{\sigma}^i)^+ \\ (\sigma^i)^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь учтено, что все матрицы Паули эрмитовы.

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma^0(\gamma^i)^+\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} = \gamma^i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0 = \gamma^\mu. \tag{250}$$

В результате получаем уравнение

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \tag{251}$$

Это и есть искомое релятивистское волновое уравнение для дираковски сопряженного спинора.

10.4 Уравнение Прока

Рассмотрим векторное поле $\varphi^\mu(x)$. Мы показали, что условия того, что это поле преобразуется по массивному неприводимому представлению группы Лоренца со спином $s = 1$ имеют вид

$$(\Box + m^2)\varphi^\mu(x) = 0, \qquad \partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0.$$

Покажем, что два этих условия можно переписать эквивалентным образом в виде одного уравнения.

Введем антисимметричное тензорное поле $F_{\mu\nu}$ по правилу

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu(x) - \partial_\nu \varphi_\mu(x). \tag{252}$$

Рассмотрим уравнение

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \varphi^\nu = 0. \tag{253}$$

Действуя на него оператором ∂_ν получим $m^2 \partial_\nu \varphi^\nu = 0$. То есть уравнение (253) содержит как следствие условие равенства нулю дивергенции поля φ^μ. Подставляя (252) в (253) получим

$$\Box \varphi^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \varphi^\mu + m^2 \varphi^\nu = 0. \tag{254}$$

Но мы показали, что из уравнения (253) следует $\partial_\mu \varphi^\nu = 0$. Подставляя это в (254) получим $(\Box + m^2)\varphi^\nu = 0$. Таким образом, уравнение (253) содержит как следствие все условия, определяющие массивное представление со спином $s = 1$.

Уравнение (136) называется уравнением Прока, оно описывает динамику массивного поля со спином $s = 1$.

10.5 Уравнение Максвелла

Ранее было показано, что безмассовое представление со спиральностями $\lambda = \pm 1$ описываются векторным полем, удовлетворяющим условиям

$$\Box A_\mu = 0, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{255}$$

Два этих уравнения можно переписать в виде одного уравнения. Для этого положим в уравнения (253) $m = 0$. Получим следующее уравнение

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{256}$$

Здесь $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Покажем, что уравнение (256) действительно воспроизводит условия неприводимости. Определим преобразования поля A_μ следующего вида

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi, \tag{257}$$

где $\xi(x)$ - произвольное скалярное поле. Преобразования (257) называются калибровочными.

Очевидно, что выражение $F_{\mu\nu}$ инвариантно относительно калибровочных преобразований, это означает, что можно изменить поле A_μ без изменения уравнений (256). Тогда на поле A_μ можно наложить одно условие, отвечающее специальному выбору поля $\xi(x)$. Единственное лоренц-инвариантное условие на A_μ линейное по производным ∂_μ и по A_μ имеет вид $\partial_\mu A^\mu$. Покажем, что такое условие действительно можно наложить. Пусть поле A_μ не удовлетворяет данному условию. Введем поле A'_μ по правилу (256) и потребуем, чтобы $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Отсюда возникает уравнение на поле $\xi(x)$, $\Box\xi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x)$. Это уравнение имеет решение и значит условие $\partial_\mu A'^\mu = 0$ можно наложить.

Запишем уравнение (256) в виде

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

и учтем, что на поле A_μ можно наложить условие $\partial_\nu A^\nu = 0$. Тогда данное уравнение примет вид $\Box A^\mu = 0$. В итоге мы видим, что уравнение (256) имеем в качестве следствий условия, определяющие безмассовые представления со спиральностями $\lambda = \pm 1$.

Таким образом уравнение (256) описывает динамику безмассовых представлений со спиральностями $\lambda = \pm 1$. Оно называется уравнением Максвелла. Соотношение $\partial_\mu A^\mu = 0$ называется лоренцовской калибровкой.

Поучительно проследить, как из уравнения (256) следует, что его решение A_μ содержит только две независимые компоненты в каждой точке x^μ. Вектор A_μ имеет четыре компоненты. Наложение лоренцовской калибровки означает одно условие на четыре компоненты вектора, поэтому независимых компонент будет три. Однако уравнения $\Box A^\mu = 0$ и $\partial_\mu A^\mu = 0$ инвариантны относительно остаточного калибровочного преобразования $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \eta$, где $\Box \eta(x) = 0$. Это позволяет наложить на A_μ еще одно условие. В итоге мы видим, что поле A_μ удовлетворяющее уравнению Максвелла, имеет в каждой точке (x^μ) ровно две независимые компоненты, отвечающие двум возможным спиральностям.

10.6 Уравнение Паули - Фирца

Уравнение Паули-Фирца представляет собой релятивистское уравнение, описывающее распространение неприводимого массивного представления группы Пуанкаре со спином $s = 2$.

Как было показано ранее, неприводимое массивное представление группы Пуанкаре спином $s = 2$ реализуется в терминах симметричного тензорного поля второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$, удовлетворяющего уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0 \tag{258}$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \partial^\mu \varphi_{\mu\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{259}$$

Наша цель состоит в нахождении уравнения, тождественными следствиями которого являются соотношения (258), (259).

Наиболее общее линейное релятивистски ковариантное уравнение для поля $\varphi_{\mu\nu}$ без высших производных записывается в виде

$$\begin{aligned} &(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu} + a(\partial_\mu \partial^\alpha \varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \varphi_{\mu\alpha}) + b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + \\ &+ b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + c\partial_\mu \partial_\nu \varphi + d\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0. \end{aligned} \tag{260}$$

Здесь обозначено $\varphi = \varphi^{\mu}{}_{\mu}$ и a, b, c, d - произвольные безразмерные числовые коэффициенты. Задача состоит в подборе этих коэффициентов так, чтобы из уравнений (260) вытекали условия (258), (259) как тождественные следствия. Заметим, что вообще говоря мы могли записать в уравнении (260) вместо $(\Box+m^2)\varphi_{\mu\nu}$ и $d(\Box+m^2)\varphi$ выражения $\Box\varphi_{\mu\nu}+km^2\varphi_{\mu\nu}$ и $d\Box\varphi + lm^2\varphi$ с дополнительными коэффициентам k, l, но ясно, что релятивистской теории выражения $\Box$ и m^2 должны входить в комбинации $\Box + m^2$.

a. Свернем уравнение (260) с $\eta^{\mu\nu}$, получим

$$(\Box + m^2)\varphi + a(\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu}) + 4b\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} + \\ +c\Box\varphi + 4d(\Box + m^2)\varphi = 0$$

Или

$$[(1 + c + 4d)\Box + (1 + 4d)m^2]\varphi + 2(a + 2b)\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} = 0 \qquad (261)$$

b. Подействуем на уравнение (260) оператором $\partial^{\mu}\partial^{\nu}$, получим

$$(\Box + m^2\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} + 2a\Box\partial^{\mu}\partial^{\nu} + b\Box\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} + c\Box^2\varphi + \\ +d\Box(\Box + m^2)\varphi = 0$$

Или

$$[(1 + 2a + b)\Box + m^2]\partial^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\mu\nu} + (c + d)\Box^2\varphi + dm^2\Box\varphi = 0 \qquad (262)$$

c. Подействуем на уравнение (260) оператором ∂^{μ}, получим

$$(\Box + m^2)\partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu} + a(\Box\partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_{\alpha\beta}) + \\ +b\partial_{\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_{\alpha\beta} + c\Box\partial_{\nu}\varphi + d\Box\partial_{\nu}\varphi + dm^2\partial_{\nu}\varphi = 0$$

Или

$$(1 + a)\Box\partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu} + m^2\partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu} + (a + b)\partial_{\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_{\alpha\beta} + \\ (c + d)\Box\partial_{\nu}\varphi + dm^2\partial_{\nu}\varphi = 0 \qquad (263)$$

Обратим внимание, что соотношения (261), (262) можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений для нахождения двух величин φ и $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}$. Из уравнения (261) получим

$$\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = -\frac{[(1+c+4d)\Box + (1+4d)m^2]\varphi}{2(a+2b)} \tag{264}$$

Подставим это выражение в уравнение (262). Имеем

$$\begin{aligned}&[(1+2a+b)(1+c+4d)\Box^2 + [(1+2a+b)(1+4d) + \\ &+(1+c+4d)]m^2\Box + (1+4d)m^4]\varphi - 2(a+2b)(c+d)\Box^2\varphi - \\ &-2(a+2b)dm^2\Box^2\varphi = 0\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}&[[(1+2a+b)(1+c+4d) - 2(a+2b)(c+d)]\Box^2 + \\ &+[(1+2a+b)(1+4d) + (1+c+4d) - 2d(a+2b)]m^2\Box + \\ &+(1+4d)m^4]\varphi = 0\end{aligned} \tag{265}$$

Это соотношение должно выполняться тождественно. Выберем коэффициенты a, b, c, d так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}&(1+2a+b)(1+c+4d) - 2(a+2b)(c+d) = 0 \\ &(1+2a+b)(1+4d) - (1+c+4d) - 2d(a+2b) = 0\end{aligned} \tag{266}$$

После этого уравнение (264) примет вид

$$(1+4d)m^4\varphi = 0 \tag{267}$$

Пусть $1+4d \neq 0$. Тогда из уравнения (266) следует $\varphi = 0$ как и должно быть согласно второму из условий (259). Но если $\varphi = 0$, из уравнения (263) следует $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0$. Подставляя это соотношение в уравнение (262) вместе с $\varphi = 0$ получим

$$(1+a)\Box\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0 \tag{268}$$

Выберем a из условия $1+a=0$. Тогда получим

$$m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$$

Или $\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} = 0$ как и должно быть согласно первому из соотношений (259). Подставляя равенства $\varphi = 0, \partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0, \partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$ в исходное уравнение (260) получим $(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, уравнение (260) ведет к требуем условиям (258), если выполнены условия $a = -1$ и (266).

Подставим $a = -1$ в соотношение (266), получим

$$\begin{aligned}
&(b-1)(1+c+4d) - 2(2b-1)(c+d) = 0 \\
&(b-1)(1+4d) + (1+c+4d) - 2d(2b-1) = 0
\end{aligned} \tag{269}$$

В результате мы имеем систему двух алгебраических уравнений для нахождения трех коэффициентов b, c, d. Ясно, что из этих уравнений можно найти только два коэффициента, один всегда остается произвольным. Это обстоятельство можно было бы заметить с самого начала. Действительно, совершим в исходном уравнении (260) замену поля $\varphi_{\mu\nu}$ на поле $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$ по правилу

$$\varphi_{\mu\nu} = \bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu}\varphi \tag{270}$$

Подставляя (270) в уравнение (260), получим

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi + a(\partial_\mu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + \\
&+2\alpha a\partial_\mu\partial_\nu\varphi + b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{\varphi}_{\alpha\beta} + b\alpha\eta_{\mu\nu}\Box\varphi + \\
&+c\partial_\mu\partial_\nu\varphi + d(\Box + m^2)\varphi = 0
\end{aligned} \tag{271}$$

Или

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\bar{\varphi}_{\mu\nu} + a(\partial_\mu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{\varphi}_{\alpha\beta} + \\
&+(c + 2\alpha a)\partial_\mu\partial_\nu\varphi + (d + \alpha)\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0
\end{aligned} \tag{272}$$

Отсюда видно, что уравнение (272) совпадает по форме с уравнением (260), но теперь коэффициенты перед $\partial_\mu\partial_\nu\varphi$ и $(\Box + m^2)\varphi$ зависят от α. Это значит, что коэффициенты c и d в уравнении (260) не могут быть определены однозначно, один из них обязательно произволен.

Частное решение уравнений (269) имеет вид $b = 1, c = 1, d = -1$. Это, вместе с $a = -1$ позволяет записать искомое уравнение в виде

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu} - (\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\varphi_{\mu\alpha}) \\
&\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\nu\varphi - \eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0
\end{aligned} \tag{273}$$

Это есть стандартная форма записи уравнения Паули-Фирца. В общем случае, мы имеем однопараметрическое семейство уравнений, описывающих динамику массивного неприводимого представления группы Пуанкаре со спином $s = 2$. Эти уравнения были впервые построены в 1939 году.

Можно показать, что при нулевой массе уравнение Паули-Фирца сводится к линеаризованныму приближению для уравнений гравитационного поля Эйнштейна без материи.

10.7 Уравнение Рарита-Швингера

Уравнение Рарита-Швингера представляет собой уравнение, описывающее распространение неприводимого массивного представления группы Пуанкаре со спином $s = \frac{3}{2}$.

Ранее мы показали, что для описания поля со спином $a = \frac{3}{2}$ используются представления $(1, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$, то есть спин-тензоры $\varphi_{(ba)\dot{b}}$ и $\chi_{b(\dot{b}\dot{a})}$. После конвертации спинорных индексов в векторные получим $\varphi_{\mu a}$ и $\chi_{\mu\dot{a}}$. Мы будем предполагать, что искомое уравнение должно быть инвариантным относительно преобразований четности, это означает, что следует рассматривать оба представления $(1, \frac{1}{2}$ и $(\frac{1}{2}, 1)$, то есть объединить двухкомпонентные спин-векторные поля $\varphi_{\mu a}$, $\chi_{\mu\dot{a}}$ в одно векторное поле ψ_μ, являющееся дираковским четырех компонентным спинором

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \varphi_{\mu a} \\ \chi_\mu{}^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

Условия, определяющие неприводимое представление записываются в виде

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_\nu = 0 \tag{274}$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \psi_\mu &= 0 \\ \gamma^\mu \psi_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{275}$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти уравнение, тождественными следствиями которого являются соотношения (274), (275).

Наиболее общее релятивистски ковариантное уравнение первого порядка для поля ψ_μ записывается в виде

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_\nu + a\gamma_\nu(i\partial^\mu\psi_\mu) + bi\partial_\nu(\gamma^\mu\psi_\mu) + \\ +c\gamma_\nu(i\gamma^\alpha\partial_\alpha)(\gamma^\mu\psi_\mu) + dm\gamma_\nu(\gamma^\mu\psi_\mu) = 0 \tag{276}$$

Здесь a, b, c, d безразмерные числовые коэффициенты. Задача состоит в подборе этих коэффициентов Так, чтобы из уравнения (276) следовали условия (274), (275).

a. Свернем уравнение (276) с матрицей γ^ν, получим

$$2(1+2a)(i\partial^\mu\psi_\mu) + (b+4c-1)(i\gamma^\alpha\partial_\alpha)(\gamma^\mu\psi_\mu) + \\ +(4d-1)m(\gamma^\mu\psi_\mu) = 0 \tag{277}$$

b. Подействуем на уравнение (276) оператором $i\partial^\nu$, получим

$$(1+a)(i\gamma^\nu\partial_n)(i\partial^\mu\psi_\mu) - (b+c)\Box(\gamma^m\psi_\mu) + \\ +md(i\gamma^\nu\partial_n)(\gamma^\mu\psi_\mu) - m(i\partial^\mu\psi_\mu) = 0 \tag{278}$$

Выразим из уравнения (277) выражение $i\partial^m\psi_\mu$ и подставим в уравнение (278). Это приводит к соотношению

$$[(1+a)(b+4c-1) - 2(1+2a)(b+c)]\Box(\gamma^\mu\psi_\mu) - \\ [(1+a)(4d-1) - 2d(1+2a)]m(i\gamma^\nu\partial_\nu)(\gamma^m\psi_\mu) - \\ -2(1+2a)m(i\partial^\mu\psi_\mu) = 0 \tag{279}$$

Потребуем, чтобы в (279) коэффициент при $(i\gamma^\nu\partial_\nu)(\gamma^m\psi_\mu$ обратился в ноль. Отсюда $d = \frac{a+1}{2}$. Потребуем еще, чтобы коэффициент при $\Box(\gamma^\mu\psi_\mu)$ обратился в ноль. Это приводит к уравнению

$$(1+a)(b+4c-1) - 2(1+2a)(b+c) = 0 \tag{280}$$

При выполнении последнего условия в предположении что $1+2a \neq 0$, уравнение (279) сводится к

$$\partial_\mu\psi_\mu = 0, \tag{281}$$

что совпадает с первым из условий (275). Подставим это условие в уравнение (277), получим

$$(b+4c-1)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu})(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})+(4d-1)m(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})=0. \tag{282}$$

Потребуем выполнение условий $b+4c-1=0$ и $4d-1\neq 0$. Тогда из уравнения (282) следует

$$\gamma^{m}\psi_{\mu}=0, \tag{283}$$

что совпадает со вторым их условий (275). Подставляя уравнения (281), (283) в исходное уравнение (276), получим

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi_{\nu}=0, \tag{284}$$

что совпадает с условием (274). Обратимся снова к уравнению (280). С учетом $b+4c-1=0$ из него следует $b+c=0$. Два последних уравнения дают $b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{3}$. Кроме того, мы показали, что $d=\frac{a+1}{2}$. Подставляя эти значения для b, c, d в исходное уравнение (276) получим окончательно

$$\begin{gathered}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi_{\nu}+a\gamma_{\nu}(i\partial^{\mu}\psi_{\mu})-\frac{1}{3}i\partial_{\nu}(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})+\\+\frac{1}{3}\gamma_{\nu}(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha})(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})+\frac{a+1}{2}m\gamma_{\nu}(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})=0\end{gathered} \tag{285}$$

Это уравнение содержит как тождественные следствия условия (274), (275), определяющие неприводимое представление группы Пуанкаре со спином $s=\frac{3}{1}$. По существу мы получили однопараметрической семейство таких уравнений, все они называются уравнениями Рарита-Швингера.

Выбирая различные значения для параметра a можно получить разные специальные формы уравнения Рарита-Швингера. Например при $a=-\frac{1}{3}$ будем иметь

$$\begin{gathered}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi_{\nu}-\frac{1}{3}(\gamma_{\nu}i\partial_{\mu}+\gamma_{\mu}i\partial_{\nu})\psi^{\mu}+\\+\frac{1}{3}\gamma_{\nu}(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}+m)(\gamma^{\mu}\psi_{\mu})=0\end{gathered} \tag{286}$$

Именно в такой форму уравнение движения для поля со спином $s = \frac{3}{2}$ было записано в оригинальной работе Рарита и Швингера в 1941 году. Помимо произвола, связанного с выбором параметра a, уравнение Рарита-Швингера содержит дополнительный произвол, обусловленный возможностью внести вместо поля ψ_μ поле $\tilde{\psi}_\mu$ по правилу

$$\tilde{\psi}_\mu = \psi_\mu + k\gamma_\mu(\gamma^\nu\psi_\nu),$$

включающему произвольный параметр k. Наличие произвола в записи полевого уравнения есть общее свойство теории с высшими спинами. Безмассовое уравнение Рарита-Швингера используется в супергравитации для описания гравитино.

Литература

1. А. Барут, Р. Рончка, Теория представлений групп и ее приложения, Том 1, Том 2, Москва, Мир, 1980.

2. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва, ГИФМЛ, 1958.

3. Wu-Ki Tung, Group theory in physics, World Scientific, 1999.

4. I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.

Учебное издание

Иосиф Львович Бухбиндер

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИММЕТРИЯ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск: Л. В. Домбраускайте.
Подписано в печать: 12.12.2012. Сдано в печать: 20.12.2012. Печать трафаретная.
Бумага офсетная. Формат: 60x84/16. Тираж: 100 экз. Заказ: 1085/У. Уч.-изд. л.: 6,04.

Отпечатано в типографии Томского государственного педагогического университета.
г. Томск, ул. Герцена, 49. Тел. (3822) 52-12-93. E-mail: tipograf@tspu.edu.ru