Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный педагогический университет»

И. Л. Бухбиндер

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебное пособие

Томск 2012

ББК 22.31
Б 94

Печатается по решению
учебно-методического совета
Томского государственного
педагогического университета

Б 94 Бухбиндер И. Л. Модели теории поля : учебное пособие / И. Л. Бухбиндер; ФГБОУ «Томский государственный педагогический университет». – Томск : Изд-во ТГПУ, 2012. – 80 с.

Пособие содержит описание базовых моделей, используемых в современной классической и квантовой теории поля. Рассматриваются основы лагранжева формализма релятивистской теории поля, включая уравнения движения и теорему Нётер. Строятся лагранжианы свободных полей, ведущие к известным релятивистским волновым уравнениям. Представлены модели взаимодействующих скалярных (включая сигма-модель), спинорных и массивных и безмассовых векторных полей. Обсуждаются описание полей Янга-Миллса и гравитационного поля. Выводится лагранжиан теории массивного симметричного тензорного поля второго ранга (модель Паули-Фирца). Рассматривается теория антисимметричного тензорного поля второго ранга (модель Огиевецкого-Полубаринова) и устанавливается ее эквивалентность теории безмассового скалярного поля.

ББК 22.31

Рецензент: профессор кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, доктор физико-математических наук **А. В. Галажинский**

Содержание

1 Введение

Настоящее пособие представляет собой часть курса квантовой теории поля, который в течении многих лет читался автором в различных университетах в России и за рубежом. Основной материал, рассматриваемый в пособии, посвящен лагранжеву формализму в релятивистской теории поля и построению лагранжианов базовых полевых моделей, используемых в современной классической и квантовой теории поля.

В пособии излагаются основы лагранжева формализма в релятивистской теории поля, включая понятие действия и лагранжиана, вывод уравнений движения из принципа действия, глобальные симметрии и теорема Нётер, понятия свободной полевой модели и модели со взаимодействием. Обсуждается построение и свойства моделей теории скалярного, спинорного и векторного полей. Рассматриваются теория поля Янга-Миллса и теория гравитации. Подробно излагается построение лагранжиана теории свободного массивного симметричного тензорного поля второго ранга (модель Паули-Фирца) и теория безмассового свободного антисимметричного тензорного поля второго ранга (модель Огиевецкого-Полубаринова). В теории массивного векторного поля (модель Прока) и в модели Паули-Фирца показано как восстановить калибровочную инвариантность, нарушенную введением массы, с помощью штюкельберговых полей. Показана также эквивалентность модели Огиевецкого-Полубаринова модели свободного безмассового скалярного поля.

Материал носит учебный характер и предназначен для первоначального изучения предмета. По этой причине практически каждый раздел начинается с качественных мотиваций, формальные рассуждения даются на физическом уровне строгости, вычисления проводятся подробно со всеми деталями. В пособии сохранен свободный лекционный стиль изложения. Материал является внутренне замкнутым, используются только сведения из раздела "Релятивистская симметрия", предшествующего разделу "Модели теории поля"в курсе квантовой теории поля, читаемом автором. В заключение приведен список литературы для дальнейшего, более глубокого изучения, обсуждаемых в пособии вопросов.

2 Принцип действия и уравнения движения

Полем называется функция, определенная на пространстве Минковского или на какой-то его области. В общем случае будем обозначать поля как $\Phi = \Phi(x)$, где $x \equiv (x^\mu)$. Поле может быть вещественным или комплексным, скалярным, тензорным, спинорным, спин-тензорным и т.д. Поле может быть однокомпонентным или многокомпонентным. В последнем случае оно содержит индексы, которые нумеруют компоненты.

Поле рассматривается как фундаментальный физический объект. Динамика поля, то есть эволюция поля во времени, формулируется в терминах действия $S[\Phi]$, являющимся функционалом от поля. Постулируется, что действие в релятивистской теории поля имеет следующий вид

$$S = \int\limits_{\Omega} d^4x\mathcal{L} \tag{1}$$

Здесь Ω - некоторая область в пространстве Минковского, ограниченная двумя пространственно подобными поверхностями $\sigma(x) = \sigma_1$ и $\sigma(x) = \sigma_2$. Напомним, что поверхность $\sigma(x) = \sigma$ называется пространственно подобной, если в любой ее точке вектор нормали $n_\mu(x) = \partial_\mu\sigma(x)$ является временноподобным, то есть $\eta^{\mu\nu}n_\mu n_\nu > 0$. Обычно предполагается, что область Ω совпадает со всем пространством Минковского, но есть задачи, где это не так.

В соотношении (1) $\mathcal{L}$ - это вещественная функция, являющаяся лоренцевским скаляром. Это гарантирует, что действие S (1) будет лоренц-инвариантом. Говорим, что задана модель теории поля, или просто теория, если явно указан набор полей Φ и указан явный вид функции $\mathcal{L}$. Функция $\mathcal{L}$, входящая в выражение для действия (1), называется лагранжианом. Термины действие и лагранжиан взяты из классической механики.

Если в выражении (1) можно выделить отдельное интегрирование по временной координате t и по пространственным координатам x^i, то это выражение перепишется так

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dtL,$$

где

$$L = \int d^3x\mathcal{L}$$

. В этом случае явно видна аналогия с классической механикой и L естественно назвать функцией Лагранжа. При этом поле $\Phi(x) = \Phi(t, \vec{x})$ можно понимать как $\Phi = \Phi_{\vec{x}}(t)$. Отсюда возникает интерпретация поля как механической системы с обобщенными координатами $\Phi_{\vec{x}}(t)$, нумеруемыми векторами $\vec{x}$. Это означает, что поле - это механическая система с бесконечным (континуальным) числом степеней свободы. Поскольку поле можно описывать в терминах обобщенных координат, лагранжиана, действия, то для изучения классических полей естественно использовать методы классической механики.

Относительно лагранжиана постулируется, что он является функцией поля и его производных до некоторого конечного порядка, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu\Phi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n}\Phi(x_1))$. При этом и поле и все его производные взяты в одной и той же точке (x^μ) пространства Минковского. Обычно считается, что лагранжиан содержит производные поля не выше второго порядка, хотя используются модели, где это не так. Такие модели называются теориями с высшими производными. Помимо полей и их производных, лагранжиан может зависеть еще от разных параметров (масс, констант связи).

Для сходимости интеграла в (1) надо потребовать, чтобы $\mathcal{L} \to 0$ при $\vec{x} \to \pm\infty$. Во всех известных моделях для этого достаточно считать, что $\Phi(x) \to 0$ при $\vec{x} \to \pm\infty$. Чтобы интеграл (1) сходился и в случае, когда Ω совпадает со всем пространством Минковского, надо еще потребовать выполнения $\Phi(x) \to 0$ при $x^0 \to \pm\infty$. В результате мы приходим к стандартным граничным условиям $\Phi(x) \to 0$ при $x^\mu \to \pm\infty$.

Динамика поля задается принципом действия, согласно которому физически допустимые поля соответствуют экстремуму действия. Пусть $\Phi(x)$ - некоторое поле и $\Phi'(x)$ - другое поле, той же спин-тензорной структуры. Разность $\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ называется вариацией поля. Заметим, что в левой и правой частях этого равенства аргумент x^μ один и тот же. Рассмотрим разность $S[\Phi+\delta\Phi]-S[\Phi]$. Если эту разность можно представить в виде

$$S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = \int\limits_\Omega d^4x A(x)\delta\Phi(x) + \ldots,$$

где многоточие означает члены порядка выше первого по $\delta\Phi(x)$, то выражение

$$\int\limits_\Omega d^4x A(x)\delta\Phi(x)$$

называется вариацией функционала $S[\Phi]$ и обозначается $\delta S[\Phi]$. Функция $A(x)$ называется вариационной или функциональной производной функционала $S[\Phi]$ и обозначается $\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)}$. Итак

$$\delta S[\Phi] = \int\limits_\Omega d^4x \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)}\delta\Phi(x). \tag{2}$$

Имеет место теорема, согласно которой, если поле $\Phi(x)$ доставляет функционалу $S[\Phi]$ экстремум, то соответствующая вариация функционала обращается в ноль при любых $\delta\Phi(x)$, то есть $\delta S[\Phi] = 0$. Поскольку $\delta\Phi(x)$ - произвольно, то из (2) получим

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется классическим уравнением движения или просто уравнением движения. Это уравнение определяет физически допустимую эволюцию поля.

Вычислим вариационную производную от функционала (1) в случае, когда

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)). \tag{4}$$

Рассмотрим

$$S[\Phi] = \int\limits_\Omega d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)). \tag{5}$$

Пусть $\Phi(x)$ - поле, доставляющие функционалу $S[\Phi]$ (5) экстремум и пусть $\Phi(x)|_{\sigma_1} = \Phi_1(\vec{x})$, $\Phi(x)|_{\sigma_2} = \Phi_2(\vec{x})$. Пусть $\Phi'(x)$ - произвольное поле, имеющее ту же спин-тензорную структуру, что и $\Phi(x)$, и удовлетворяющее тем же граничным условиям $\Phi'(x)|_{\sigma_1} = \Phi_1(\vec{x})$, $\Phi'(x)|_{\sigma_2} = \Phi_2(\vec{x})$. Это значит, что $\delta\Phi(x)|_{\sigma_1} = 0$, $\delta\Phi(x)|_{\sigma_2} = 0$. Кроме того $\delta\Phi(x) \to 0$ при $\vec{x} \to \pm\infty$ в силу стандартных граничных условий.

Рассмотрим

$$S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = \int\limits_\Omega d^4x \{\mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu(\Phi + \delta\Phi)) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)\}. \tag{6}$$

Заметим, что из определения $\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ следует, что $\partial_\mu\delta\Phi(x) = \partial_\mu\Phi'(x) - \partial_\mu\Phi(x) = \delta\partial_\mu\Phi(x)$. Операция варьирования поля переставима с операцией его дифференцирования. В соотношении (6) проведем разложение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} &S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = \\ &= \int\limits_\Omega d^4x \left\{ \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\partial_\mu\delta\Phi - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) \right\} + \ldots \end{aligned}$$

Многоточие означает члены степени $\delta\Phi$ выше первой. Далее

$$S[\Phi+\delta\Phi]-S[\Phi]=\int\limits_{\Omega} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\partial_\mu\delta\Phi\right\}+\ldots=$$
$$=\int\limits_{\Omega} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\right)\right\}\delta\Phi+\int\limits_{\Omega} d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\delta\Phi\right)+\ldots=$$
$$=\int\limits_{\Omega} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\right)\right\}\delta\Phi+\int\limits_{\partial\Omega} d\sigma_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\delta\Phi+\ldots$$

Здесь $\partial\Omega$ - это граница области Ω. Так как $\delta\Phi(x)=0$ при $\vec{x}\to\pm\infty$, то вклад в интеграл по $\partial\Omega$ дает только две поверхности $\sigma(x)=\sigma_1$ и $\sigma(x)=\sigma_2$. Но $\delta\Phi(x)|_{\sigma_1}=\delta\Phi(x)|_{\sigma_2}=0$. Остается

$$\delta S[\Phi]=\int\limits_{\Omega} d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\right)\right)\delta\Phi(x). \tag{7}$$

Мы видим, что вариация действия имеет вид (2). Следовательно, вариационная производная действия имеет вид

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}. \tag{8}$$

Следовательно уравнение движения записывается в форме

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi(x)}=0. \tag{9}$$

Не трудно проверить, что уравнение (9) можно переписать так

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)\partial\Phi}\partial_\mu\Phi-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)\partial(\partial_\nu\Phi)}\partial_\mu\partial_\nu\Phi=0.$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
A^{\mu\nu}(\Phi(x), \partial_\alpha \Phi(x)) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x))\partial(\partial_\nu \Phi(x))} \\
B^{\mu}(\Phi(x), \partial_\alpha \Phi(x)) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x))\partial \Phi(x)} \\
C(\Phi(x), \partial_\alpha \Phi(x)) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)}
\end{aligned}
$$

С учетом этих обозначений уравнение движения принимает вид

$$
A^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Phi + B^\mu\partial_\mu\Phi + C = 0. \qquad (10)
$$

Мы видим, что уравнение движения (9) в общем случае есть дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. В частном случае может оказаться, что $A^{\mu\nu} = 0$ или $B^\mu = 0$ или $C = 0$.

Заметим, что лагранжиан $\mathcal{L}$ определен неоднозначно. К нему всегда можно добавить выражение вида $\partial_\mu R^\mu(\Phi(x))$, где $R^\mu(\Phi(x))$ - произвольное векторное поле, зависящее от $\Phi(x)$, при этом уравнения движения (9) не изменятся.

3 Глобальные симметрии

Рассмотрим теорию с набором полей $\Phi^i(x)$ и действием

$$
S[\Phi] = \int\limits_\Omega d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi).
$$

Индекс i включает в себя все индексы, имеющиеся у поля (не путать с пространственным индексом). Бесконечно малые преобразования координат и полей

$$
\begin{aligned}
x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \\
\Phi'^i(x') &= \Phi^i(x) + \triangle\Phi^i(x) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

называются бесконечно малыми преобразованиями симметрии, если они оставляют действие инвариантным. Итак, если (11) - это преобразование симметрии, то

$$S[\Phi] = S[\Phi']$$

или

$$\int\limits_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu\Phi(x)) = \int\limits_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}(\Phi'(x), \partial'_\mu\Phi'(x')). \tag{12}$$

здесь Ω' - это область изменения координат x'^μ, Ω - область изменения координат x^μ, причем координаты x'^μ и x^μ связаны соотношением (11). Поэтому при преобразовании координат $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ область Ω' переходит в область Ω. Здесь ∂'_μ - это производные по координатам x'^μ.

Рассмотрим более подробно соотношение (11). Имеем

$$\Phi'^i(x + \delta x) = \Phi^i(x) + \triangle\Phi^i(x)$$

или

$$\Phi'^i(x) + \partial_\mu\Phi^i(x)\delta x^\mu) = \Phi^i(x) + \triangle\Phi^i(x).$$

Отсюда

$$\triangle\Phi^i(x) = \Phi'^i(x) - \Phi^i(x) + \partial_\mu\Phi^i(x)\delta x^\mu$$

или

$$\triangle\Phi^i(x) = \delta\Phi^i(x) + \partial_\mu\Phi^i(x)\delta x^\mu. \tag{13}$$

Здесь $\delta\Phi^i(x)$ - вариация поля.

Мы будем предполагать, что преобразования (11) характеризуются набором постоянных параметров $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^N$ так, что

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= X^\mu{}_a(x)\xi^a \\ \delta\Phi^i(x) &= Y^i{}_a(x, \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x))\xi^a, \end{aligned} \tag{14}$$

здесь $a = 1, 2, \dots, N$. Преобразования (14) называются N-параметрическими глобальными непрерывными преобразованиями. Термин "глобальные"подчеркивает тот факт, что параметры ξ^a от координат x^μ не зависят. Чтобы задать преобразования (14), надо указать явный вид функций $X^\mu{}_a(x)$, $Y^\mu{}_a(x, \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x))$. С учетом соотношений (13)-(14), преобразование (11) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \\
\delta x^\mu &= X^\mu{}_a(x)\xi^a, \\
\Phi'^i(x') &= \Phi^i(x) + \triangle\Phi^i(x), \\
\triangle\Phi^i(x) &= (Y^i{}_a(x, \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x)) + \partial_\mu\Phi(x)X^\mu{}_a(x))\xi^a.
\end{aligned} \tag{15}$$

Глобальные преобразования симметрии подразделяются на пространственно-временные преобразования симметрии и преобразования внутренней симметрии. Во втором случае $\delta x^\mu = 0$ и $Y^i{}_a = Y^i{}_a(\Phi(x))$. Иными словами, преобразования внутренней симметрии - это преобразования полей при фиксированных координатах.

3.1 Пространственно-временные симметрии

Важнейшей из пространственно-временных симметрий является симметрия относительно преобразований группы Пуанкаре. Бесконечно малая форма этих преобразований имеет вид

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

или

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Здесь $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ - параметры лоренцевских вращений, а a^μ - параметры бесконечно малых трансляций.

Мы уже отмечали, что по определению лагранжиан является скаляром, построенном из полей и их производных. Как вообще из этих объектов можно построить скаляр? Естественный ответ на данный вопрос состоит в том, чтобы считать поля некоторыми спин-тензорами. Тогда построение скаляра не представляет труда. Надо просто перемножить поля и производные полей и в конце свернуть все индексы. В результате мы приходим к предположению, что поля $\Phi(x)$ являются спин-тензорами и значит преобразуются по некоторому представлению группы Лоренца.

$$\Phi'_A(x') = \Phi_A(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(J_{\mu\nu}\right)_A{}^B\Phi_B(x). \tag{16}$$

Здесь A, B - набор спинорных точечных и неточечных индексов, а $(J_{\mu\nu})_A{}^B$ - матрица генераторов группы Лоренца в данном представлении. Обычно спинорные индексы называются лоренцевскими. В рассматриваемом случае роль параметров ξ^a играют $\omega_{\mu\nu}$. Подставляем в (16) $\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, получаем

$$\delta\Phi_A(x) = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(J_{\mu\nu}\right)_A{}^B\Phi_B(x), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu). \end{aligned}$$

Выражение $\frac{i}{2}\left(J_{\mu\nu}\right)_A{}^B\Phi_B(x)$ играет роль функции $Y^i{}_a(x, \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x))$ в общем соотношении (14).

В случае неоднородных преобразований Лоренца получим

$$\delta\Phi_A(x) = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(J_{\mu\nu}\right)_A{}^B\Phi_B(x) - ia^\mu\left(P_\mu\right)_A{}^B\Phi_B, \tag{18}$$

где $(P_\mu)_A{}^B = \delta_A{}^B i\partial_\mu$. Тогда роль функции $Y^i{}_a(x, \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x))\xi^a$ играет выражение

$$\frac{i}{2}\left(J_{\mu\nu}\right)_A{}^B\Phi_B(x)\omega^{\mu\nu} - \partial_\mu\Phi_A(x)a^\mu.$$

Помимо симметрии, связанной с группой Пуанкаре, могут существовать и другие пространственно-временные симметрии. Например, если лагранжиан не содержит размерных параметров, то действие может быть инвариантным относительно конформных преобразований. Они определяются как такие преобразования координат, при которых интервал ds^2 умножается на некоторую функцию. То есть, если $x'^\mu = x'^\mu(x)$, то такое преобразование будет конформным, когда $ds'^2 = \varphi(x) ds^2$. Здесь ds^2 - интервал в терминах координат x^μ, а ds'^2 - интервал в терминах координат x'^μ. Не трудно показать, что множество конформных преобразований образует группу, где групповое умножение задано как последовательное выполнение преобразований. Конформная симметрия накладывает жесткие ограничения на форму лагранжиана. Мы здесь этих вопросов касаться не будем.

3.2 Внутренние симметрии

Пусть поле с лоренцевскимим индексами A является вектором в некотором n-мерном линейном пространстве, и значит, имеет n компонент, $\Phi \equiv \Phi^I{}_A$, $I = 1, 2, \ldots, n$. Пусть кроме того в этом линейном пространстве определено представление некоторой группы Ли с параметрами ξ^a и генераторами $(T_a)^I{}_J$. Это значит, что задано линейное преобразование

$$\delta\Phi^I{}_A = i(T_a)^I{}_J \Phi^J{}_A \xi^a. \tag{19}$$

Заметим, что здесь лоренцевские индексы не преобразуются.

Генераторы T_a удовлетворяют соотношению

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c,$$

где $f_{ab}{}^c$ - структурные постоянные данной группы Ли.

Пусть действие $S[\Phi]$ инвариантно относительно преобразований (19). В этом случае преобразование (19) является преобразованием внутренней симметрии.

4 Теорема Нётер

Теорема Нётер представляет общий метод нахождения сохраняющихся величин в теории поля. Аддитивные сохраняющиеся величины принято называть динамическими инвариантами.

Теорема Каждому N- параметрическому непрерывному преобразованию симметрии соответствует N динамических инвариантов.

Доказательство

Рассмотрим преобразование симметрии

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= X^\mu{}_a \xi^a \\ \delta \Phi^i &= Y^i{}_a \xi^a, \end{aligned} \tag{20}$$

относительно которых действие инвариантно, $\delta S[\Phi] = 0$. Вычислим вариацию действия $\delta S[\Phi] = S[\Phi'] - S[\Phi]$. Здесь

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \int\limits_\Omega d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)), \\ S|\Phi'| &= \int\limits_\Omega d^4x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_\mu \Phi'(x')). \end{aligned}$$

Совершим в первой части выражения для $S[\Phi']$ замену переменных $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$. При этом область Ω' перейдет в область Ω. Якобиан такой замены переменных есть

$$det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = det \left(\delta^\mu{}_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu \right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu.$$

Здесь учтено, что δx^μ содержит бесконечно малые параметры ξ^a. В результате

$$S[\Phi'] = \int\limits_\Omega d^4x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} \left(\Phi'(x + \delta x), \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \Phi'(x + \delta x) \right).$$

Чтобы найти $(\partial x^\nu / \partial x'^\mu)$ учтем, что

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\alpha} = \delta^\nu{}_\alpha.$$

Но

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}{}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\delta x^{\mu}.$$

Тогда в низшем порядке по δx^{μ} получим

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\nu}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu}.$$

Кроме того, учтем, что согласно определению преобразования симметрии $\Phi'(x+\delta x) = \Phi(x) + \triangle\Phi(x)$. Поэтому

$$S[\Phi'] = \int\limits_{\Omega} d^4x (1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu})\mathcal{L}(\Phi + \triangle\Phi, (\delta^{\nu}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu})(\partial_{\nu}\Phi + \partial_{\nu}\triangle\Phi)).$$

Далее проведем разложение в ряд Тейлора в выражении для лагранжиана $\mathcal{L}(\Phi + \triangle\Phi, (\delta^{\nu}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu})(\partial_{\nu}\Phi + \partial_{\nu}\triangle\Phi))$ с точностью для членов линейных по $\triangle\Phi$ и δx^{ν} . Получим

$$\begin{aligned}
S|\Phi'| &= \int\limits_{\Omega} d^4x \, \{ \, \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi) + \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)\partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \\
&+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\triangle\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\Phi^i}\left(\partial_{\mu}\triangle\Phi^i - \partial_{\nu}\Phi^i\partial_{\mu}\delta x^{\nu}\right) \} = \\
&= \int\limits_{\Omega} d^4x \, \{ \, \mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\partial_{\mu}\Phi^i\delta x^{\mu} + \\
&+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\Phi^i}\left(\partial_{\mu}\delta\Phi^i + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\Phi^i\delta x^{\nu} + \partial_{\nu}\Phi^i\partial_{\mu}\delta x^{\nu} - \partial_{\nu}\Phi^i\partial_{\mu}\delta x^{\nu}\right) \} = \\
&= \int\limits_{\Omega} d^4x \, \{ \, \mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\Phi^i}\partial_{\mu}\delta\Phi^i + \\
&+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\partial_{\mu}\Phi^i\delta x^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\nu}\Phi^i}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\Phi^i\delta x^{\mu} \, \} = \\
&= \int\limits_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L}(\partial_{\mu}\delta x^{\mu}) + (\partial_{\mu}\mathcal{L})\delta x^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\Phi^i}\partial_{\mu}\delta\Phi^i \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\delta\partial_\mu\Phi^i = \partial_\mu\delta\Phi^i$. Теперь используем уравнения движения, согласно которым

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i} = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}.$$

В итоге

$$S[\Phi'] = \int\limits_\Omega d^4x \left\{\mathcal{L} + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}\delta\Phi^i\right)\right\}$$

Теперь подставим (20). Это дает

$$\begin{aligned}\delta S[\Phi] &= S[\Phi'] - S|\Phi| = \int\limits_\Omega d^4x\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}\delta\Phi^i + \mathcal{L}\delta x^\mu\right\} = \\ &= \int\limits_\Omega d^4x\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}Y^i{}_a + \mathcal{L}X^\mu{}_a\right\}\xi^a.\end{aligned}$$

Поскольку преобразования (20) это преобразования симметрии, то $S[\Phi] = 0$. Так как параметры ξ^a независимы, то получим

$$\int\limits_\Omega d^4x\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}Y^i{}_a + \mathcal{L}X^\mu{}_a\right\} = 0. \tag{21}$$

Обозначим

$$J^\mu{}_a = -\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi^i}Y^i{}_a + \mathcal{L}X^\mu{}_a\right\}. \tag{22}$$

Поскольку область Ω в интеграле (21) произвольна, то соотношение (22) ведет к уравнению

$$\partial_\mu J^\mu{}_a = 0. \tag{23}$$

Вернемся к соотношению (21) и преобразуем его с помощью теоремы Гаусса, получим

$$\int\limits_{\delta\Omega} d\sigma_\mu J^\mu{}_a = 0. \tag{24}$$

Поскольку на пространственной бесконечности поле обращается в ноль, то интеграл в (24) сводится к

$$\int\limits_{\sigma_2} d\sigma_\mu J^\mu{}_a - \int\limits_{\sigma_1} d\sigma_\mu J^\mu{}_a = 0. \tag{25}$$

Знак минус обусловлен изменением направления вектора нормали к поверхности $\sigma(x) = \sigma_1$.

Введем функционалы, зависящие от гиперповерхности $\sigma(x) = \sigma$ по правилу

$$C_a[\sigma] = \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu J^\mu{}_a. \tag{26}$$

Тогда соотношение (25) ведет к равенству

$$\begin{aligned} C_a[\sigma_2] &= C_a[\sigma_1], \\ a &= 1, 2, 3, \ldots, N, \end{aligned} \tag{27}$$

то есть, функционалы $C_a[\sigma]$ (26) не зависят от выбора пространственно-подобной гиперповерхности σ, $C_a[\sigma] = const$. Последнее условие означает, что функционалы $C_a[\sigma]$ (26) являются динамическими инвариантами. Таким образом, каждому N-параметрическому преобразованию симметрии соответствует N динамических инвариантов. Доказательство закончено.

Выражение $J^\mu{}_a$ (22) называется обобщенным током, соотношение (23) называется локальным законом сохранения обобщенного тока.

Выберем в качестве поверхности $\sigma(x) = \sigma$ поверхность постоянного времени, $\sigma(x) = x^0$. Тогда из соотношения (27) следует

$$C_a[x^0{}_2] = C_a[x^0{}_1],$$

где

$$C_a[x^0] = \int\limits_{x^0} d^3x J^0{}_a. \tag{28}$$

Сделаем два замечания.

1. Функционалы $C_a[\sigma]$ (26) являются динамическими инвариантами при выполнении уравнений движения.

2. Обобщенный ток определен неоднозначно. Пусть $J^\mu{}_a$ - обобщенный ток, введем $\tilde{J}^\mu{}_a = J^\mu{}_a + \partial_\nu f^{\mu\nu}{}_a$, где $f^{\mu\nu}{}_a = -f^{\nu\mu}{}_a$ - антисимметричная по индексам μ, ν функция от полей и их производных. Тогда $\partial_\nu \tilde{J}^\mu{}_a = \partial_\mu J^\mu{}_a + \partial_\mu\partial_\nu f^{\mu\nu}{}_a = \partial_\mu J^\mu{}_a$. Иными словами, если $\partial_\mu J^\mu{}_a = 0$, то и $\partial_\mu \tilde{J}^\mu{}_a = 0$. Локальный закон сохранения обобщенного тока не меняется. Значит и динамические инварианты $C_a[\sigma]$ также не меняются. Указанный произвол иногда используется, чтобы наложить на обобщенный ток некоторые дополнительные условия.

5 Тензор энергии-импульса

Рассмотрим закон сохранения, связанный с инвариантностью относительно трансляций $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, где a^μ - произвольный постоянный вектор. Ясно, что если лагранжиан не зависит явно от координат, то трансляция является преобразованием симметрии. В этом случае

$$\delta x^\mu = a^\mu = \delta^\mu{}_\nu a^\nu,$$

то есть функция $X^\mu{}_a$ в общем соотношении $\delta x^\mu = X^\mu{}_a \xi^a$ есть $\delta^\mu{}_\nu$, а роль параметра ξ^a играет a^μ. Из соотношения (18) при $\omega^{\mu\nu} = 0$ следует, что

$$\delta\Phi^i = -\partial_\mu \Phi^i a^\mu = -\delta^\mu{}_\nu \partial_\mu \Phi^i a^\nu.$$

Это значит, что роль функции $Y^i{}_a$ в соотношении $\delta\Phi^i = Y^i{}_a \xi^a$ играет $-\delta^\mu{}_\nu \partial_\mu \Phi^i$.

Обобщенный ток, отвечающий симметрии относительно трансляций, обозначается $T^\mu{}_\nu$ и называется (каноническим) тензором энергии-импульса. Из общего соотношения (22) получаем

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^i} \partial_\nu \Phi^i - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu. \tag{29}$$

Запишем динамические инварианты, соответствующие симметрии относительно трансляций. Они обозначаются P^{ν} и согласно (26) имеют вид

$$P_{\nu} = \int\limits_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu}. \tag{30}$$

В частности, при $\sigma = x^0$ из (30) получаем

$$P_{\nu} = \int d^3x T^0{}_{\nu} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi^i} \partial_{\nu} \Phi^i - \mathcal{L} \delta^0{}_{\nu} \right). \tag{31}$$

Мы видим, что

$$P_0 = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i} \dot{\Phi}^i - \mathcal{L} \right).$$

Определим по аналогии с классической механикой обобщенные импульсы $\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i}$, тогда

$$P_0 = \int d^3x (\pi_i \dot{\Phi}^i - \mathcal{L}) = H, \tag{32}$$

где H - классическая функция Гамильтона, то есть энергия. Таким образом компоненты P_0 вектора P_{ν} - это энергия. Тогда в силу релятивистской ковариантности вектор P_{ν} есть вектор энергии-импульса.

6 Предположения о структуре лагранжиана

Рассмотрим теорию с набором полей $\Phi^i(x)$ и действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_{\mu} \Phi(x)).$$

Конкретная модель теории поля задается указанием конкретного набора полей и конкретного лагранжиана.

Обычно предполагается, что поля Φ^i представляют собой спин-тензоры. Поэтому можно говорить о моделях скалярного поля, моделях векторного поля и т.д. Возможны так же модели нескольких различных типов полей.

Относительно лагранжиана предполагается, что его всегда можно разбить на сумму двух членов $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, где $\mathcal{L}_0$ - это квадратичная форма по полям и их производным, а $\mathcal{L}_{int}$ содержит суммарные степени полей и производных полей выше второй. При этом $\mathcal{L}_0$ называется свободным лагранжианом, а $\mathcal{L}_{int}$ - лагранжианом взаимодействия.

Запишем уравнение движения для теории с лагранжианом $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_\mu \Phi^i} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \partial_\mu \Phi^i} \right). \tag{33}$$

Так как $\mathcal{L}_0$ квадратичен по полям и их производным, то левая часть уравнений (33) всегда линейна по полям и содержит не более двух производных полей. Поэтому, если $\mathcal{L}_{int} = 0$, то соответствующее уравнение движения будет линейным дифференциальным уравнением в частных производных порядка не выше второго с постоянными коэффициентами. Если $\mathcal{L}_{int} \neq 0$, то уравнение движения будет нелинейным. Это обстоятельство объясняет названия "свободный лагранжиан"и "лагранжиан взаимодействия".

Рассмотрим уравнение движения, отвечающие свободному лагранжиану $\mathcal{L}_0$. Оно называется свободным уравнением движения. Поскольку поля являются спин-тензорами, то свободные уравнения движения это линейные дифференциальные уравнения для спин-тензоров. Если еще потребовать, чтобы в этих уравнениях спин-тензоры преобразовывались по представлению (неприводимому или приводимому) группы Пуанкаре, то соответствующие свободные уравнения движения не могут быть ни чем иным кроме как релятивистскими волновыми уравнениями. Поэтому построение лагранжиана $\mathcal{L}_0$ сводится к задаче о нахождении лагранжиана, генерирующего данные уравнения. Для всех спин-тензорных полей в настоящее время эта задача решена.

Основная проблема в построении полного лагранжиана $\mathcal{L}$ состоит в том, чтобы найти $\mathcal{L}_{int}$. Никакого общего рецепта здесь не существует и требуется привлечение различных физических и математических предположений и определенного искусства.

7 Модели теории скалярного поля

Рассмотрим вещественное скалярное поле $\varphi(x)$. Как известно, соответствующее релятивистское волновое уравнение - это уравнение Клейна-Гордона.

$$\Box\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0.$$

Построим лагранжиан, ведущий к этому уравнению. По определению лагранжиан должен быть скалярным полем и являться квадратичной формой по полю $\varphi(x)$ и его производным $\partial_\mu\varphi(x)$. Помимо этого лагранжиан должен содержать параметр m^2. Поскольку уравнение Клейна-Гордона не содержит обратных степеней массы, то естественно считать, что в лагранжиане также не должно быть обратных степеней массы. Очевидно, что используя $\varphi(x)$, $\partial_\mu\varphi(x)$ и m^2, можно построить только два скаляра, имеющих одинаковую размерность и являющихся квадратичными по полю и его производным. Это $\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi$ и $m^2\varphi^2$. Поэтому наиболее общий возможный вид свободного лагранжиана скалярного поля есть

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}C_1\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \frac{1}{2}C_2m^2\varphi^2, \qquad (34)$$

где C_1, C_2 - произвольные вещественные коэффициенты.

Найдем уравнения движения, отвечающие лагранжиану (34). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\varphi} &= C_2m^2\varphi \\
\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\varphi} &= \frac{1}{2}C_1\eta^{\alpha\beta}\left(\delta_\alpha{}^\mu\partial_\beta\varphi + \delta_\beta{}^\mu\partial_\alpha\varphi\right) = \\
&= \frac{1}{2}C_1\left(\eta^{\mu\beta}\partial_\beta\varphi + \eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\varphi\right) = C_1\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\varphi}\right) = C_2m^2\varphi - C_1\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi = 0,$$

следовательно, уравнение движения есть

$$C_1\Box\varphi - C_2 m^2\varphi = 0.$$

Это уравнение должно совпадать с уравнением Клейна-Гордона. Отсюда следует, что $C_2 = -C_1$. В итоге мы приходим к лагранжиану

$$\mathcal{L}_0 = C_1\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right). \tag{35}$$

Константа C_1 остается произвольной.

Для фиксации константы C_1 потребуем, чтобы энергия поля, описываемого лагранжианом (35), была положительной. Запишем вектор энергии-импульса

$$P_\nu = \int d^3x T^0{}_\nu = \int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\varphi}\partial_\nu\varphi - \delta^0{}_\nu\mathcal{L}\right),$$

где $T^\mu{}_\nu$ - тензор энергии-импульса. Отсюда

$$P_0 = \int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\varphi}\partial_0\varphi - \mathcal{L}\right).$$

Подставим в качестве $\mathcal{L}$ выражение $\updownarrow_0$ (35) и получим

$$\begin{aligned}
P_0 &= C_1\int d^3x\left(\eta^{0\nu}\partial_\nu\varphi\partial_0\varphi - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right) = \\
&= C_1\int d^3x\left(\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\partial_i\varphi\partial_i\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right) = \\
&= C_1\int d^3x\left(\frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\partial_i\varphi\partial_i\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right).
\end{aligned}$$

Мы видим, что энергия поля будет положительной при любой положительной константе C_1. Дальнейший выбор C_1 - это вопрос удобства. Обычно принимается $C_1 = 1$. Таким образом, свободный лагранжиан скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{36}$$

Установим размерность поля φ. Запишем действие

$$S_0[\Phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2.\right)$$

В естественной системе единиц, где $\hbar = 1$ и скорость света $c = 1$, действие безразмерно. d^4x имеет размерность -4, m^2 имеет размерность 2, ∂_μ имеет размерность 1. Обозначим $[\varphi]$ - размерность поля φ. Тогда имеем

$$0 = -4 + 2 + 2[\varphi],$$

отсюда $[\varphi] = 1$.

Включение взаимодействия в простейшем случае осуществляется добавлением к лагранжиану $\mathcal{L}_0$ (36) выражения $-V(\varphi)$, где $V(\varphi)$ - произвольная функция от φ, разложение которой в ряд Тейлора начинается по крайней мере с члена φ^3. В результате полный лагранжиан скалярного поля есть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - V(\varphi). \tag{37}$$

Слагаемое $\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ называется кинетическим членом, слагаемое $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ называется массовым членом и слагаемое $V(\varphi)$ называется потенциалом взаимодействия. Выражение $U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi)$ называется потенциалом скалярного поля.

Обычно потенциал $V(\varphi)$ принимается в виде полинома любой конечной степени не ниже третьей,

$$V(\varphi) = \frac{\lambda_1}{3!}\varphi^3 + \frac{\lambda_2}{4!}\varphi^4 + \ldots + \frac{\lambda_{n-2}}{n!}\varphi^n.$$

Параметры λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ называются константами связи. Найдем их размерности. Поскольку $V(\varphi)$ входит в лагранжиан в качестве слагаемого, то $[V(\varphi)] = -4$. Для слагаемого $\lambda_{k-2}\varphi^k/k!$ имеем

$$4 = k[\varphi] + [\lambda_{k-2}].$$

Отсюда $[\lambda_{k-2}] = 4 - k$. Из всех констант связи выделенной является λ_2, размерность которой равна нулю. Обозначим $\lambda_2 = \lambda$. Таким образом простейший потенциал взаимодействия есть

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \tag{38}$$

Основываясь на лагранжиане (37), можно построить большое количество моделей теории скалярного поля. Рассмотрим, например, комплексное скалярное поле $\varphi = \sqrt{2}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, где φ_1, φ_2 - вещественные скалярные поля. Лагранжиан для вещественных скалярных полей запишем по аналогии с (37)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - \frac{1}{2}m^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}m^2\varphi_2^2 - V(\varphi_1, \varphi_2). \tag{39}$$

Потенциал $V(\varphi_1, \varphi_2)$ предполагается вещественным. В выражении (39) перейдем от полей φ_1, φ_2 к полям $\varphi = \sqrt{2}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, $\varphi^* = \sqrt{2}(\varphi_1 - i\varphi_2)$. Тогда получим

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \tilde{V}(\varphi^*, \varphi), \tag{40}$$

где

$$\tilde{V}(\varphi^*, \varphi) = V(\varphi_1, \varphi_2)\big|_{\varphi_1 = \frac{\varphi+\varphi^*}{2\sqrt{2}}, \varphi_2 = \frac{\varphi-\varphi^*}{2i\sqrt{2}}}$$

Обратим внимания, что свободный лагранжиан в (40) инвариантен относительно преобразований $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$, $\varphi'^* = e^{-i\alpha}\varphi^*$, где α - произвольный вещественный параметр. Естественно потребовать, чтобы потенциал $\tilde{V}(\varphi^*, \varphi)$ обладал тем же свойством, $\tilde{V}(e^{-i\alpha}\varphi^*, e^{i\alpha}\varphi) = \tilde{V}(\varphi^*, \varphi)$. Этому например удовлетворяет $\tilde{V}(\varphi^*, \varphi) = \tilde{V}(\varphi^*, \varphi)$.

Рассмотрим построение более сложной модели. Пусть имеется n-компонентное скалярное поле $\varphi^I(x)$, $I = 1, 2, \ldots, n$. Основываясь на лагранжиане (37), можно сразу написать

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\delta_{IJ}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J - \frac{1}{2}m_{IJ}^2\varphi^I\varphi^J - V(\varphi^I). \tag{41}$$

Предположим, что потенциал $V(\varphi^I)$ есть полином по φ^I, включающий только безразмерные константы связи. Тогда

$$V(\varphi^I) = \frac{1}{4!}\lambda_{IJKL}\varphi^I\varphi^J\varphi^K\varphi^L. \tag{42}$$

Параметры λ_{IJKL} называются константами скалярной связи, параметры m^2_{IJ} называются массовой матрицей.

Рассмотрим еще более сложную модель теории скалярного поля. Положим в (41) $m^2_{IJ} = 0$, $V(\varphi^I) = 0$ и заменим δ_{IJ} на функцию $g_{IJ}(\varphi)$. В результате будем иметь лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{IJ}(\varphi)\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu\varphi^J. \tag{43}$$

Потребуем, чтобы форма лагранжиана (43) была инвариантной относительно произвольной репараметризации полей φ^I,

$$\varphi^I = f^I(\varphi'). \tag{44}$$

Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{IJ}(\varphi)\frac{\partial\varphi^I}{\partial\varphi'^K}\frac{\partial\varphi^J}{\partial\varphi'^L}\partial^\mu\varphi^K\partial_\mu\varphi^L = \frac{1}{2}g'_{KL}(\varphi')\partial^\mu\varphi^K\partial_\mu\varphi^L.$$

Это возможно при условии

$$g'_{KL}(\varphi') = \frac{\partial\varphi^I}{\partial\varphi'^K}\frac{\partial\varphi^J}{\partial\varphi'^L}g_{IJ}(\varphi). \tag{45}$$

Последнее соотношение есть закон преобразования компонент ковариантного тензора второго ранга при преобразованиях координат. Из (43) следует, что $g_{IJ}(\varphi) = g_{JI}(\varphi)$. Принимается следующая интерпретация. Поля $\varphi^I(x)$ понимаются как координаты на некотором многообразии, а $g_{IJ}(\varphi)$ понимается как риманова метрика на этом многообразии. В итоге лагранжиан (43) формулируется в геометрических терминах. Модель теории скалярного поля с лагранжианом (43) называется сигма-моделью.

8 Модели теории спинорного поля

Рассмотрим спинорное поле $\psi(x)$. Соответствующее релятивистское волновое уравнение - это уравнение Дирака

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0.$$

Лагранжиан, отвечающий этому уравнению, записывается в виде

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{46}$$

Покажем, что лагранжиан (46) действительно ведет к уравнению Дирака. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\bar{\psi}} &= i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\\ \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} &= 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0.$$

Мы получили уравнение Дирака.

Покажем, что лагранжиан (46) является вещественным скаляром. Перейдем к двухкомпонентным обозначениям

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\chi}^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}}).$$

Тогда $\bar{\psi}\psi = \bar{\chi}^a\varphi_a + \bar{\varphi}_{\dot{a}}\chi^{\dot{a}}$. Можно показать (см. "Релятивистская симметрия"), что каждое из слагаемых в левой части является лоренцевским скаляром. Кроме того, $\bar{\chi}^a = (\chi^{\dot{a}})^*$, $\bar{\varphi}_{\dot{a}} = (\varphi_a)^*$. Поэтому выражение $\bar{\psi}\psi$ вещественно. Аналогично

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\chi}^a(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\chi^{\dot{a}} + \bar{\varphi}_{\dot{a}}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\varphi_a.$$

, Можно показать (см. "Релятивистская симметрия") что каждое из слагаемых в правой части является лоренцевским вектором, а с учетом

$\bar{\chi}^a = (\chi^{\dot{a}})^*$ и $\bar{\varphi}_{\dot{a}} = (\varphi_a)^*$ - вещественным. Таким образом, лагранжиан (46) есть вещественный скаляр.

Как ввести взаимодействие? Если следовать примеру теории скалярного поля, то полный лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - V(\bar{\psi}, \psi), \tag{47}$$

где $V(\bar{\psi}, \psi)$ - вещественный потенциал взаимодействия. Поскольку свободный лагранжиан (46) инвариантен относительно преобразований $\psi' = e^{i\alpha}\psi$, $\bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\psi$, где α - произвольный вещественный параметр, то естественно потребовать инвариантность потенциала $V(\bar{\psi}, \psi)$ относительно этих преобразований. Это дает $V(e^{-i\alpha}\bar{\psi}, e^{i\alpha}\psi) = V(\bar{\psi}, \psi)$. Решением является например $V(\bar{\psi}, \psi) = V(\bar{\psi}, \psi)$. Простейшее выражение для потенциала есть $\lambda(\bar{\psi}\psi)^2$. Другое возможное выражение для потенциала взаимодействия это $V = \lambda_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$. Здесь λ, λ_1 - константы связи. Рассмотренные потенциалы взаимодействия называются четырехфермионными или взаимодействиями Ферми.

Найдем размерность спинорного поля и констант связи четырехфермионных взаимодействий. Имеем

$$0 = -4 + [m] + 2[\psi].$$

Отсюда $[\psi] = 3/2$. Аналогично

$$0 = -4 + [\lambda] + 4[\psi].$$

Отсюда $[\lambda] = -2$. Точно также $[\lambda_1] = -2$. Размерность констант четырехфермионного взаимодействия обратна размерности квадрата массы.

9 Модели взаимодействующих скалярных и спинорных полей

Рассмотрим построение лагранжиана взаимодействия скалярного и спинорного полей. Будем предполагать, что этот лагранжиан не содержит производных и включает безразмерную константу связи. Пусть скалярное поле вещественно. Ранее отмечалось, что свободный лагранжиан спинорного поля инвариантен относительно преобразований вида $\psi' = e^{i\alpha}\psi$, $\bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\psi}$, где α - произвольный вещественный параметр. Потребуем, чтобы лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}(\varphi, \psi, \bar{\psi})$ был инвариантен относительно этих преобразований, то есть $\mathcal{L}_{int}(\varphi, e^{-i\alpha}\bar{\psi}, e^{i\alpha}\psi) = \mathcal{L}_{int}(\varphi, \bar{\psi}, \psi)$. Отсюда $\mathcal{L}_{int}(\varphi, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L}_{int}(\varphi, \bar{\psi}\psi)$. Предполагая, что разложение $\mathcal{L}_{int}(\varphi, \bar{\psi}, \psi)$ в ряд Тейлора начинается по меньшей мере с третьего порядка, получим

$$\mathcal{L}_{int} = -h\varphi\bar{\psi}\psi + \dots .$$

Многоточие означает степени полей выше третьей. Параметр h - константа связи. Найдем ее размерность. Имеем

$$0 = -4 + [h] + [\varphi] + 2[\psi].$$

Поскольку $[\varphi] = 1$ и $[\psi] = 3/2$, получаем $[h] = 0$. В результате простейший лагранжиан взаимодействия скалярного и спинорного полей имеет вид

$$\mathcal{L}_{int} = -h\varphi\bar{\psi}\psi. \tag{48}$$

Выражение (48) называется потенциалом взаимодействия Юкавы, а h - константой юкавской связи.

С учетом (48) лагранжиан взаимодействующих скалярного и спинорного полей записывается так

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m_1^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_2\bar{\psi}\psi - h\varphi\bar{\psi}\psi. \tag{49}$$

Здесь m_1, m_2 - массы, относящиеся к скалярному и спинорному полям соответственно.

Заметим, что лагранжиан (49) содержит две безразмерные константы связи λ и h. В принципе, к (49) можно добавить еще одно выражение, описывающие взаимодействие и содержащее только безразмерную константу связи. Оно имеет вид $-h_1\varphi\bar{\psi}\gamma_5\psi$, где матрица γ_5 определена следующим образом

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \tag{50}$$

h_1 - безразмерная константа связи.

В случае, если имеются многокомпонентные скалярные и спинорные поля φ^I, ψ^J, можно ввести Юкавские взаимодействия вида $h_{IJK}\varphi^I\bar{\psi}^J\psi^K$ или вида $h_{1IJK}\varphi^I\bar{\psi}^J\gamma_5\psi^K$.

При изучении различных вопросов феноменологии элементарных частиц используется лагранжиан взаимодействия скалярных и спинорных полей с производными. Например $g_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi i\partial_\mu\varphi$, $g_2\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi i\partial_\mu\varphi$, где константы связи g_1, g_2 обязательно размерны.

10 Модели теории свободного векторного поля

10.1 Безмассовая теория

Релятивистское волновое уравнение для безмассового векторного поля, то есть уравнение Максвелла, имеет вид

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Наша цель состоит в нахождении соответствующего лагранжиана.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{51}$$

и покажем, что уравнения движения, следующие из этого лагранжиана, это уравнение Максвелла. Запишем действие

$$S_0[A] = \int\limits_\Omega d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

и вычислим его вариацию. Имеем

$$
\begin{aligned}
\delta S_0 &= -\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} d^4x(\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d^4x F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = \\
&= -\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} d^4x F^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) = \int\limits_{\Omega} d^4x F^{\mu\nu}\partial_\nu \delta A_\mu = \\
&= \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\nu (F^{\mu\nu}\delta A_\mu) - \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\nu F^{\mu\nu}\delta A_\mu .
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое с помощью теории Гаусса-Остроградского сводится к интегралу по гиперповерхности, охватывающей область Ω. Как было отмечено в разделе **1** этот интеграл равен нулю в силу стандартных граничных условий и того, что $\delta A_\mu|_{\sigma_1} = \delta A_\mu|_{\sigma_2} = 0$. Остается

$$
\delta S_0 = -\int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\nu F^{\mu\nu}\delta A_\mu ,
$$

поэтому

$$
\frac{\delta S_0[A]}{\delta A_\mu} = -\partial_\nu F^{\mu\nu}.
$$

Следовательно, уравнение движения есть

$$
\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0
$$

Мы получили уравнение Максвелла.

Выражение $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ называется тензором напряженности векторного поля. Очевидно, что тензор напряженности инвариантен относительно преобразований поля A_μ вида

$$
\delta A_\mu = \partial_\mu \xi(x). \tag{52}
$$

Здесь $\xi(x)$ - произвольное скалярное поле. Преобразование (52) называется калибровочным, поле $\xi(x)$ называется параметром калибровочного преобразования или калибровочным параметром. Поскольку и уравнения движения и лагранжиан записываются только в терминах напряженности $F_{\mu\nu}$, то они автоматически инвариантны относительно преобразований (52). Говорим, что теория свободного безмассового векторного поля калибровочно инвариантна.

Очевидно, что все лагранжианы вида $C\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ дается (51), а C есть произвольная ненулевая вещественная константа, ведут к уравнению Максвелла. Ранее на примере теории скалярного поля мы показали, что знак константы C, являющейся общим множителем в лагранжиане, должен определяться из условия положительности энергии поля, а выбор $|C|$ - это вопрос удобства. В рассматриваемом случае положительность энергии требует в (51) знак "минус". Удобный выбор для константы $|C|$ есть $1/4$.

Как известно, уравнение Максвелла и соответствующий лагранжиан (51) описывают свободное электромагнитное поле в пространстве без зарядов и токов.

Найдем размерность поля A_μ. Поскольку $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \sim \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$, то имеем $4 = 2 + 2[A_\mu]$. Отсюда $[A_\mu] = 1$. Векторное поле имеет ту же размерность, что и скалярное поле.

10.2 Массивная теория

Релятивистское волновое уравнение для массивного векторного поля, то есть уравнение Прока, имеет вид

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m^2 \varphi^\mu = 0,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$. Наша цель состоит в нахождении лагранжиана, ведущего к этому уравнению.

Заметим, что при $m^2 = 0$ уравнение Прока сводится к уравнению Максвелла. Поэтому лагранжиан для уравнения Прока должен получится из лагранжиана (51) добавлением члена $\sim m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu$. Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\varphi^\mu \tag{53}$$

и покажем, что он действительно ведет к уравнению Прока.

Запишем действие

$$S_0[\varphi] = \int\limits_\Omega d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\varphi^\mu \right\}$$

и вычислим его вариацию. Имеем

$$\delta S_0|\varphi| = \int\limits_\Omega d^4x \left\{ \delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2\delta\varphi_\mu\varphi^\mu + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\delta\varphi^\mu \right\}.$$

Вариацию первого слагаемого мы уже вычисляли, она имеет вид

$$-\int\limits_\Omega d^4x(\partial_\nu F^{\mu\nu})\delta\varphi_\mu.$$

Поэтому

$$\delta S_0[\varphi] = \int\limits_\Omega d^4x(-\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu)\delta\varphi_\mu.$$

Следовательно

$$\frac{\delta S_0[\varphi]}{\delta\varphi_\mu} = -\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu.$$

И тогда уравнение движения есть

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m^2\varphi^\mu = 0.$$

Мы получили уравнение Прока.

Лагранжиан (53) называется лагранжианом Прока. Заметим, что этот лагранжиан не является калибровочно инвариантным. Действительно

$$\delta\mathcal{L}_0 = \delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2\delta(\varphi_\mu\varphi^\mu) = m^2\varphi^\mu\delta\varphi_\mu = m^2\varphi^\mu\partial_\mu\xi \neq 0.$$

Ясно, что калибровочная инвариантность возможна только при $m^2 = 0$.

Покажем, что лагранжиан Прока можно переформулировать эквивалентным образом так, чтобы он был калибровочно инвариантным при ненулевой массе. Рассмотрим лагранжиан

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi)(\varphi^\mu + \partial^\mu\varphi), \tag{54}$$

где φ - скалярное поле. По построению, лагранжиан (54) описывает динамику двух полей: векторного поля φ_μ и скалярного поля φ. Этот лагранжиан очевидно инвариантен относительно следующих калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \varphi'_\mu &= \varphi_\mu + \partial_\mu\xi, \\ \varphi' &= \varphi + \xi. \end{aligned} \tag{55}$$

Действительно, $\varphi'_\mu - \partial_\mu\varphi' = \varphi_\mu + \partial_\mu\xi - \varphi_\mu - \partial_\mu\xi = \varphi_\mu - \partial_\mu\varphi$. Отсюда следует инвариантность лагранжиана (54) относительно преобразований (55). Поскольку лагранжиан калибровочно инвариантен, то можно наложить калибровочные условия, число которых совпадает с числом калибровочных параметров. В данном случае имеется один калибровочный параметр и, значит, можно наложить одну калибровку. Выберем эту калибровку в виде $\varphi = 0$. Тогда очевидно, что лагранжиан (54) сведется к лагранжиану Прока (53). Тем самым мы показали, что теории с лагранжианами (53) и (54) эквивалентны и, значит, использование любого из них - это вопрос удобства. Поле φ, для которого калибровочное преобразование не содержит производных параметра, называется полем Штюкельберга.

11 Модели взаимодействующих скалярного, спинорного и векторного полей

Рассмотрим модель комплексного скалярного поля с лагарнжианом

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi). \tag{56}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобальных преобразований.

$$\varphi' = e^{ie\xi}\varphi, \quad \varphi^{*'} = e^{-ie\xi}\varphi^*, \tag{57}$$

здесь ξ - произвольный постоянный вещественный параметр, а e - константа, называемая электрическим зарядом.

В бесконечно малой форме преобразования (57) записываются в виде

$$\delta\varphi = ie\varphi\xi, \quad \delta\varphi^* = -ie\varphi^*\xi. \tag{58}$$

В соответствии с теоремой Нётер, инвариантности действия относительно преобразований (58) отвечает обобщенный ток

$$j^\mu = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}ie\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi^*}ie\varphi^*\right) = ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \partial^\mu\varphi^*\varphi). \tag{59}$$

Ток (59) удовлетворяет локальному закону сохранения

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{60}$$

и ведет к динамическому инварианту

$$Q = \int d^3x j^0 = ie\int d^3x\varphi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \varphi \tag{61}$$

называемому электрическим зарядом комплексного скалярного поля. Здесь введено обозначение

$$\varphi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial_\mu} \varphi = \varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\varphi.$$

Заметим, что преобразование (58) есть пример преобразования внутренней симметрии. Соответствующие динамические инварианты принято называть зарядами.

Рассмотрим модель спинорного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar\psi i\gamma^\mu\partial_\mu\varphi - m\bar\psi\psi - V(\bar\psi\psi).$$

Очевидно, что этот лагранжиан инвариантен относительно глобальных преобразований

$$\psi' = e^{ie\xi}\psi, \quad \bar\psi' = e^{-ie\xi}\bar\psi, \tag{62}$$

или в бесконечно малой форме

$$\delta\psi = ie\psi\xi, \quad \delta\bar{\psi} = -ie\bar{\psi}\xi, \tag{63}$$

здесь ξ - произвольный постоянный вещественный параметр. Используя теорему Нётер, находим соответствующий обобщенный ток

$$j_\mu = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}ie\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}}ie\bar{\psi}\right) = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{64}$$

Ток j_μ (64) удовлетворяет локальному закону сохранения (60). Данному току соответствует динамический инвариант

$$Q = \int d^3xj^0 = e\int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi = e\int d^3x\psi^+\psi, \tag{65}$$

называемый электрическим зарядом спинорного поля.

Таким образом, рассмотренные нами модели комплексных полей характеризуются сохраняющимися электрическими зарядами. По этой причине комплексные поля называются заряженными.

Наша следующая цель состоит в построении лагранжианов взаимодействия скалярного и спинорного полей с безмассовым векторным полем. Как известно, безмассовое векторное поле ассоциируется с электромагнитным полем. Это значит, что мы хотим построить лагранжианы, описывающие взаимодействие скалярного и спинорного полей с электромагнитным полем. Безмассовое векторное поле A_μ описывается лагранжианом, инвариантным относительно калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\xi(x)$. Естественно потребовать, чтобы полные лагранжианы, включающие скалярные, спинорные и безмассовые векторные поля, были также калибровочно инваринтны.

Рассмотрим сначала спинорное поле. Простейший естественный претендент на роль лагранжиана взаимодействия выглядит так

$$\mathcal{L}_{int} = j^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \tag{66}$$

Параметр e играет роль константы связи. Если добавить выражение (66) к лагранжиану свободного спинорного поля, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - V(\bar{\psi}\psi) = \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - V(\bar{\psi}\psi).\end{aligned} \tag{67}$$

Покажем, что лагранжиан (67) инвариантен относительно калибровочных преобразований векторного поля, дополненных специальными преобразованиями спинорного поля.

Совершим в (67) калибровочное преобразование $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi$. Получим

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA'_\mu + ie\partial_\mu \xi)\psi - m\bar{\psi}\psi - V(\bar{\psi}\psi).$$

Совершим еще преобразование

$$\psi' = e^{ie\xi(x)}\psi, \quad \bar{\psi}' = e^{-ie\xi(x)}\bar{\psi}. \tag{68}$$

Это преобразование по форме совпадает с преобразованием (63), но теперь параметр ξ не постоянен, $\xi = \xi(x)$. После этого

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}' e^{ie\xi(x)} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA'_\mu + ie\partial_\mu \xi) e^{-ie\xi(x)}\psi' - \\
&- m\bar{\psi}' e^{ie\xi(x)} e^{-ie\xi(x)}\psi' - V(\bar{\psi}' e^{ie\xi(x)} e^{-ie\xi(x)}\psi') = \\
&= \bar{\psi}' i\gamma^\mu e^{-ie\xi(x)} e^{ie\xi(x)} (\partial_\mu - ieA'_\mu + ie\partial_\mu \xi - \\
&- ie\partial_\mu \xi)\psi' - m\bar{\psi}'\psi' - V(\bar{\psi}'\psi') = \\
&= \bar{\psi}' i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA'_\mu)\psi' - m\bar{\psi}'\psi' - V(\bar{\psi}'\psi').
\end{aligned}$$

Мы видим, что лагранжиан (67), выраженный в терминах $\bar{\psi}$, ψ, A_μ, имеет тот же вид, что и будучи выраженным в терминах $\bar{\psi}'$, ψ', A'_μ. Другими словами, данный лагранжиан инвариантен относительно совместных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi(x)$ и (68). Преобразования (68) называются калибровочными преобразованиями спинорного поля.

Обратим внимание, что поле A_μ входит в лагранжиан (67) в комбинации

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \tag{69}$$

Рассмотрим преобразование выражения (69) при калибровочных преобразованиях

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)\psi' = (\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu \xi(x)) e^{ie\xi(x)}\psi = \\
&= e^{ie\xi(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu \xi(x) + ie\partial_\mu \xi(x))\psi = \\
&= e^{ie\xi(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = e^{ie\xi(x)} D_\mu \psi.
\end{aligned}$$

Мы видим, что при калибровочных преобразованиях $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi(x)$, $\psi' = e^{ie\xi(x)}\psi(x)$ выражение $D_\mu\psi$ преобразуются также как ψ. По этой причине выражение $D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ называется ковариантной производной спинорного поля. В результате получаем, что лагранжиан (67) теории со взаимодействием с полем A_μ получается из лагранжиана спинорного поля заменой обычной частной производной ∂_μ на ковариантную производную $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Такая процедура называется минимальным включением взаимодействия.

Перейдем теперь к построению взаимодействия комплексного скалярного поля с электромагнитным полем. Будем с самого начала считать, что искомый лагранжиан должен быть инвариантным относительно калибровочного преобразования векторного поля $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi(x)$ и калибровочного преобразования скалярного поля, которое получается из (57) заменой постоянного параметра ξ на функцию $\xi(x)$ и имеет вид

$$\varphi' = e^{ie\xi(x)}\varphi, \quad \varphi'^* = e^{-ie\xi(x)}\varphi^*. \tag{70}$$

Введем

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi, \\ (D_\mu\varphi)^* &= \partial_\mu\varphi^* + ieA_\mu\varphi^* \end{aligned} \tag{71}$$

и покажем, что это ковариантные производные, то есть покажем, что

$$\begin{aligned} (D'_\mu\varphi') &= e^{ie\xi(x)}(D_\mu\varphi), \\ (D'_\mu\varphi')^* &= e^{-ie\xi(x)}(D_\mu\varphi)^*. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} D'_\mu\varphi' &= \partial_\mu\varphi' - ieA'_\mu\varphi' = \partial_\mu(e^{ie\xi(x)}\varphi) - ie(A_\mu + \partial_\mu\xi(x))e^{ie\xi(x)}\varphi(x) = \\ &= e^{ie\xi(x)}[\partial_\mu\varphi + ie\xi(x)\varphi - ieA_\mu\varphi - ie\xi(x)\varphi] = e^{ie\xi(x)}D_\mu\varphi. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(D'_\mu\varphi')^* = e^{-ie\xi(x)}(D_\mu\varphi)^*,$$

то есть соотношения (71) действительно определяют ковариантные производные.

Теперь заменим в лагранжиане свободного комплексного скалярного поля частные производные $\partial_\mu\varphi$, $\partial_\mu\varphi^*$ на ковариантные производные $D_\mu\varphi$, $(D_\mu\varphi)^*$ соответственно. При этом очевидно, что $(D'_\mu\varphi')^*(D'_\nu\varphi') = (D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi)$. В результате приходим к калибровочно инвариантному лагранжиану.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \eta^{\mu\nu}(D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi) = \\ &= \eta^{\mu\nu}[(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*][(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi] - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi).\end{aligned} \tag{72}$$

К лагранжианам (67) и (72) надо еще приписать лагранжиан свободного электромагнитного поля $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Окончательно, лагранжианы, описывающие модели взаимодействующих скалярного и электромагнитного полей и спинорного и электромагнитного полей, имеют вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi), \tag{73}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{74}$$

Модель теории поля с лагранжианом (73) называется скалярной электродинамикой. Модель теории поля с лагранжианом (74) называется спинорной элетродинамикой.

Найдем размерность константы связи e. Выделим в (73) член $e^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi$. Тогда имеем $4 = 2[e] + 2[A] + [\varphi]$. Размерность A_μ найдем из $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \sim \partial_\mu A^\nu\partial^\mu A_\nu$. Это дает $4 = 2 + 2[A]$, или $[A] = 1$. Тогда $2[e] = 4 - 2[A] - 2[\varphi] = 0$, то есть $[e] = 0$. Аналогично из (74) имеем $4 = 2[\psi] + [e] + [A]$ или $[e] = 4 - 3 - 1 = 0$. Константа связи e в лагранжианах (73) и (74) безразмерна.

Рассмотрим полезное свойство ковариантных производных. Вычислим коммутатор

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - ieA_\mu,\ \partial_\nu - ieA_\nu] = -ie\partial_\mu A_\nu + ie\partial_\nu A_\mu = -ieF_{\mu\nu},$$

то есть

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]. \tag{75}$$

Таким образом тензор напряженности векторного поля записывается в терминах коммутатора ковариантных производных. Это обстоятельство еще раз подчеркивает особое значение ковариантной производной.

12 Поле Янга-Миллса

Общий урок, который можно извлечь из рассматрения лагранжианов взаимодействия скалярного и спинорного полей с электромагнитным полем состоит в следующим: теорию, инвариантную относительно глобальных преобразований, оказалось возможным модифицировать так, чтобы она стала инвариантной относительно преобразований того же вида, но с параметрами, зависящими от точки пространства-времени. При этом в теорию вводится векторное поле, заданное с точностью до калибровочного преобразования. Это векторное поле определяет ковариантную производную $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, причем напряженность векторного поля $F_{\mu\nu}$ получается из коммутатора ковариантных производных. Исходные глобальные преобразования скалярного и спинорного полей имели вид $\varphi' = e^{ie\xi}\varphi$ и формировали абелеву группу $U(1)$. В этом разделе мы проведем обобщение описанной выше конструкции для общего случая, когда исходные глобальные преобразования симметрии формируют неабелеву группу Ли.

Прежде всего введем терминологию. Произвольные преобразования полей с параметрами, зависящими от точки пространства Минковского называются калибровочными преобразованиями. Модель теории поля, действие которой инвариантно относительно калибровочных преобразований, называется калибровочной моделью или калибровочной теорией.

Рассмотрим модель теории поля с набором полей $\Phi^I{}_A(x)$ и действием $S[\Phi]$, и пусть действие инвариантно относительно глобальных преобразований полей, образующих некоторую группу Ли. Здесь A - набор лоренцевских индексов, а I - индекс внутренней симметрии. В этом случае существует общий метод построения лагранжиана взаимодействия полей $\Phi^I{}_A(x)$ с безмассовым векторным полем. Этот метод основан на калибровочном принципе, рассмотрение которого будет приведено в данном разделе.

Калибровочный принцип. Модель теории поля, инвариантная относительно группы Ли глобальных преобразований, может быть переформулирована так, что она будет инвариантной относительно той же группы, но с локальными параметрами. При этом в теорию вводится взаимодействие с векторным полем.

Реализация калибровочного принципа для частного случае была впервые предложена в 1954 году Янгом и Миллсом. В 1956 году Утияма развил общую процедуру. Векторное поле, вводимое на основе калибровочного принципа, принято называть полем Янга-Миллса.

Рассмотрим модель теории поля с лагранжианом $\mathcal{L}(\Phi^I{}_A, \partial_\mu \Phi^I{}_A)$ и предположим, что поле $\Phi^I{}_A(x)$ преобразуется по представлению некоторой компактной группы Ли с постоянными параметрами ξ^a. Это значит, что заданы преобразования

$$\Phi'^I{}_A(x) = h^I{}_J(\xi)\Phi^I{}_A(x), \tag{76}$$

где $\xi \equiv (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^N)$ и $h^I{}_J(\xi)$ - матрицы представления группы Ли в пространстве полей $\Phi^I{}_A(x)$,

$$h(\xi) = e^{ig\xi^a T_a}, \tag{77}$$

где g - константа, а матрица $(T_a)^I{}_J$ есть представление генераторов, соответствующей алгебры Ли. Мы для простоты будем называть $(T_a)^I{}_J$ просто генераторами. При этом выполняется соотношение

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c, \tag{78}$$

где $f_{ab}{}^c$ - структурные постоянные. Преобразования (76) предполагаются преобразованиями глобальной симметрии, относительно которых лагранжиан $\mathcal{L}(\Phi^I{}_A, \partial_\mu \Phi^I{}_A)$ инвариантен, то есть

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(h\Phi, h\partial_\mu \Phi). \tag{79}$$

Заменим в соотношении (76) постоянные параметры ξ^a скалярными полями $\xi^a(x)$. Эти скалярные поля называются калибровочными параметрами. В результате получим калибровочные преобразования

$$\begin{aligned} \Phi'^I{}_A(x) &= h^I{}_J(\xi(x))\Phi^I{}_A(x), \\ h^I{}_J(\xi(x)) &= \left(e^{ig\xi^a(x)T_a}\right)^I{}_J. \end{aligned} \tag{80}$$

Очевидно, что теперь соотношение (79) уже не выполняется. Действительно,

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(h\Phi, \partial_\mu(h\Phi)) = \mathcal{L}(h\Phi, h\partial_\mu \Phi + \partial_\mu h\Phi) \neq \mathcal{L}(h\Phi, h\partial_\mu \Phi).$$

Источником неинвариантности служит производная $\partial_\mu h$. Наша цель состоит в модификации лагранжиана $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ так, чтобы новый лагранжиан был инвариантен относительно калибровочных преобразований (80). Идею такой модификации можно проследить при построении взаимодействия скалярного и спинорного полей с электромагнитным полем. Основным элементом такого построения была ковариантная производная. Мы покажем, что и в случае неабелевых калибровочных преобразований (80) можно ввести ковариантную производную.

Определим

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \tag{81}$$

где $A_\mu(x)$ - векторное поле, которое по определению принадлежит алгебре Ли с генераторами T_a, то есть

$$A_\mu(x) = A^a{}_\mu(x)T_a. \tag{82}$$

Здесь $A^a{}_\mu(x)$ - набор векторных полей, число которых совпадает с числом калибровочных параметров $\xi^a(x)$ $(a = 1, 2, \dots, N)$. Поле $A_\mu(x)$ называется калибровочным полем или полем Янга-Миллса. Аналогичная терминология используется и для полей $A^a{}_\mu(x)$.

Потребуем, чтобы величина $D_\mu\Phi$ (81) преобразовывалась ковариантно, то есть

$$D'_\mu\Phi' = hD_\mu\Phi. \tag{83}$$

Отсюда следует определенный закон преобразования для поля Янга-Миллса. Имеем

$$\partial_\mu\Phi' - igA'_\mu\Phi' = h(\partial_\mu\Phi - igA_\mu\Phi)$$

или

$$\partial_\mu h\Phi - igA'_\mu h\Phi = h(\partial_\mu\Phi - igA_\mu\Phi)$$

или

$$h(\partial_\mu\Phi) + \partial_\mu h\Phi - igA'_\mu h\Phi = h\partial_\mu\Phi - ighA_\mu\Phi.$$

Отсюда в силу произвольности Φ получаем

$$igA'_\mu h = ighA_\mu + \partial_\mu h$$

или

$$A'_\mu = hA_\mu h^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\mu h h^{-1}.$$

Окончательно

$$A'_\mu = hA_\mu h^{-1} + \frac{i}{g}h\partial_\mu h^{-1}. \tag{84}$$

Соотношение (84) определяет калибровочное преобразование поля Янга-Миллса.

Не трудно показать, что множество преобразований (84) образует группу, где групповое умножение определено как последовательное выполнение преобразований. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} {A_\mu}^{(1)} &= h_1A_\mu {h_1}^{-1} + \frac{i}{g}h_1\partial_\mu {h_1}^{-1}, \\ {A_\mu}^{(2)} &= h_2{A_\mu}^{(1)} {h_2}^{-1} + \frac{i}{g}h_2\partial_\mu {h_2}^{-1}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} A_\mu{}^{(2)} &= h_2[h_1 A_\mu h_1{}^{-1} + \frac{i}{g} h_1 \partial_\mu h_1{}^{-1}] h_2{}^{-1} + \frac{i}{g} h_2 \partial_\mu h_2{}^{-1} = \\ &= h_2 h_1 A_\mu (h_2 h_1)^{-1} + \frac{i}{g} h_2 h_1 (\partial_\mu h_1{}^{-1}) h_2{}^{-1} + \frac{i}{g} h_2 \partial_\mu h_2{}^{-1} = \\ &= h_2 h_1 A_\mu (h_2 h_1)^{-1} + \frac{i}{g} h_2 h_1 \partial_\mu (h_2 h_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Мы видим, что последовательное выполнение двух калибровочных преобразований есть снова калибровочное преобразование.

Используя ковариантную производную (81), мы можем построить лагранжиан, инвариантный относительно калибровочных преобразований. Для этого надо в исходном лагранжиане $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ заменить частную производную $\partial_\mu \Phi$ на ковариантную производную $D_\mu \Phi$. В результате мы приходим к лагранжиану $\mathcal{L}(\Phi, D_\mu \Phi)$, инвариантному относительно совместных преобразований (80), (84). Заметим, что переходя к лагранжиану $\mathcal{L}(\Phi, D_\mu \Phi)$, мы ввели в теорию взаимодействие полей $\Phi^I{}_A$ с калибровочным полем A_μ.

Найдем бесконечно малую форму преобразований (80),(84). Поскольку

$$\Phi'^I{}_A = \left(e^{ig\xi^a(x) T_a}\right)^I{}_J \Phi^I{}_A,$$

то

$$\delta \Phi^I = ig (T_a)^I{}_J \Phi^J \xi^a. \tag{85}$$

Индексы A, которые не затрагиваются преобразованиями (80) далее не выписываем. Рассмотрим преобразования (84). В бесконечно малой форме

$$h = \mathbf{1} + ig\xi^a T_a, \quad h^{-1} = \mathbf{1} - ig\xi^a T_a,$$

где $\mathbf{1}$ - единичная матрица в пространстве представления группы преобразований. Тогда

$$A'^a{}_\mu T_a = A^a{}_\mu T_a + ig A^c{}_\mu [T_b, T_c] \xi^b + \frac{i}{g} (\mathbf{1} + ig\xi^b T_b)(-ig) T_a \partial_\mu \xi^a.$$

Отсюда

$$A'^a{}_\mu T_a = igA^c{}_\mu [T_b, T_c]\xi^b + T_a \partial_\mu \xi^a.$$

Но $[T_b, T_c] = if_{bc}{}^a T_a$. Мы будем рассматривать только полупростые группы Ли, для которых структурные постоянные являются полностью антисимметричными, и будем их записывать так $f_{bc}{}^a = f^{abc}$. Тогда получим

$$A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu + \partial_\mu \xi^a - gf^{abc}\xi^b A^c{}_\mu,$$

или

$$A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu + \partial_\mu \xi^a + gf^{acb} A^c{}_\mu \xi^b. \tag{86}$$

Обозначим

$$D_\mu{}^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu + gf^{acb}A^c{}_\mu. \tag{87}$$

Тогда из соотношения (86) получим

$$\delta A^a{}_\mu = D_\mu{}^{ab}\xi^b. \tag{88}$$

Соотношение (88) определяет бесконечно малую форму калибровочного преобразования поля Янга-Миллса.

Поскольку мы ввели в рассмотрение новое (по сравнению с исходным полем Φ^I) поле A_μ, то необходимо построить для него лагранжиан. Будем следовать аналогии с электродинамикой. Вычислим коммутатор ковариантных производных (81). Имеем

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = -ig\partial_\mu A_\nu + ig\partial_\nu A_\mu + \\ &+ (-ig)^2[A_\mu, A_\nu] = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]).\end{aligned}$$

Обозначим

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{89}$$

тогда

$$[D_\mu, D_\nu] = -igG_{\mu\nu}. \tag{90}$$

Выражение $G_{\mu\nu}$ (89) называется тензором напряженности поля Янга-Миллса.

Выясним, как преобразуется $G_{\mu\nu}$ при калиброванных преобразованиях. Во-первых, из соотношений $D'_\mu\Phi' = hD_\mu\Phi$ и $\Phi' = h\Phi$ следует, в силу произвольности Φ, что $D'_\mu h = hD_\mu$ или

$$D'_\mu = hD_\mu h^{-1}. \tag{91}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G'_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D'_\mu, D'_\nu] = \frac{i}{g}(hD_\mu h^{-1}hD_\nu h^{-1} - hD_\nu h^{-1}hD_\mu h^{-1}) = \\ &= \frac{i}{g}h[D_\mu, D_\nu]h^{-1} = hG_{\mu\nu}h^{-1}, \end{aligned}$$

то есть

$$G'_{\mu\nu} = hG_{\mu\nu}h^{-1}. \tag{92}$$

Запишем еще раз

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] = (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu)T_a - igA^b{}_\mu A^c{}_\nu[T_b, T_c] = \\ &= (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu)T_a. \end{aligned}$$

Обозначим

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu, \tag{93}$$

тогда

$$G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}T_a, \tag{94}$$

кроме того, из определения (89) следует, что тензор $G_{\mu\nu}$ является антисимметричным:

$$G_{\mu\nu} = -G_{\nu\mu}. \tag{95}$$

Рассмотрим

$$trG'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu} = trhG_{\mu\nu}h^{-1}hG^{\mu\nu}h^{-1} = trhG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h^{-1} = \mathbf{tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu},$$

это значит, что выражение $trG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ является калибровочно инвариантным. Кроме того

$$trG_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = G^a{}_{\mu\nu}G^{b\mu\nu}trT_aT_b.$$

Известно, что генераторы полупростых компактных групп Ли удовлетворяют условиям нормировки $trT_aT_b \sim \delta_{ab}$. Поэтому $trG_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \sim G^a{}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}$. Последнее выражение постулируется в качестве лагранжиана поля Янга-Миллса

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G^a{}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}. \tag{96}$$

Таким образом, полный лагранжиан взаимодействующих полей Φ^I и $A^a{}_\mu$ имеет вид

$$\mathcal{L}(\Phi, D_\mu\Phi) + \mathcal{L}_{YM}. \tag{97}$$

Найдем уравнения движения для теории чистого поля Янга-Миллса. Запишем действие

$$S_{YM}[A] = \int\limits_\Omega d^4x\left(-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\right) \tag{98}$$

и вычислим его вариацию. Имеем

$$\begin{aligned}
\delta S_{YM}[A] &= -\frac{1}{4}\int\limits_\Omega d^4x\{\delta G^a{}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + G^a{}_{\mu\nu}\delta G^{a\mu\nu}\} = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega d^4xG^{a\mu\nu}\delta G^a{}_{\mu\nu} = \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega d^4xG^{a\mu\nu}(\partial_\mu\delta A^a{}_\nu - \partial_\nu\delta A^a{}_\mu + gf^{abc}\delta A^b{}_\mu A^c{}_\nu + \\
&+ gf^{abc}A^b{}_\mu\delta A^c{}_\nu) = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega d^4x\{-\partial_\mu G^{a\mu\nu}\delta A^a{}_\nu + \partial_\nu G^{a\mu\nu}\delta A^a{}_\mu + \\
&+ gG^{a\mu\nu}f^{abc}A^c{}_\nu\delta A^b{}_\mu + gG^{a\mu\nu}f^{abc}A^b{}_\mu\delta A^c{}_\nu\}.
\end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований переобозначим индексы: в предпоследнем слагаемом $b \leftrightarrow a$, в последнем $c \leftrightarrow a$ и $\mu \leftrightarrow \nu$. Получим

$$\delta S_{YM}[A] = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega d^4x\{2\partial_\nu G^{a\mu\nu}\delta A^a{}_\mu + gG^{b\mu\nu}f^{bac}A^c{}_\nu\delta A^a{}_\mu + gG^{c\nu\mu}f^{cba}A^b{}_\nu\delta A^a{}_\mu\}.$$

Теперь заменим $c \leftrightarrow b$ в последнем слагаемом и окончательно получим

$$\delta S_{YM}[A] = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d^4x\{2\partial_\nu G^{a\mu\nu}\delta A^a{}_\mu + gf^{acb}A^c{}_\nu G^{b\mu\nu}\delta A^a{}_\mu +$$

$$+ \;\; gf^{acb}A^c{}_\nu G^{b\mu\nu}\delta A^a{}_\mu\} = -\int\limits_{\Omega} d^4x\{(\delta^{ab}\partial_\nu + gf^{acb}A^c{}_\nu)G^{b\mu\nu}\}\delta A^a{}_\mu =$$

$$= \;\; -\int\limits_{\Omega} d^4x D_\nu{}^{ab}G^{b\mu\nu}\delta A^a{}_\mu.$$

Отсюда

$$\frac{\delta S_{YM}[A]}{\delta A^a{}_\mu} = -D_\nu{}^{ab}G^{b\mu\nu}. \tag{99}$$

Следовательно уравнение движения для чистого поля Янга-Миллса есть

$$D_\nu{}^{ab}G^{b\mu\nu} = 0. \tag{100}$$

Рассмотрим систему взаимодействующих полей $A_\mu{}^a$ и Φ^I. В этом контексте поля Φ^I обычно называют материей или полями материи. Полное действие такой системы записывается в виде

$$S[\Phi, A] = S_{YM}[A] + S_m[\Phi, A]. \tag{101}$$

Здесь действие полей Янга-Миллса $S_{YM}[A]$ дается (98), а действие полей материи в поле Янга-Миллса $S_m[\Phi, A]$ есть

$$S_m[\Phi, A] = \int\limits_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(\Phi, D_\mu\Phi). \tag{102}$$

Уравнения движения в теории с действием (101) имеют вид

$$\frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu} = 0, \qquad \frac{\delta S|\Phi, A|}{\delta \Phi^I} = 0. \tag{103}$$

Первое из этих уравнений записывается так

$$\frac{\delta S_{YM}[A]}{\delta A^a{}_\mu} + \frac{\delta S_m[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu} = 0. \tag{104}$$

Учитывая соотношение (99), получим

$$D_\nu{}^{ab}G^{b\mu\nu} = \frac{\delta S_m[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu}. \tag{105}$$

Второе из уравнений (103) есть

$$\frac{\delta S_m[\Phi, A]}{\delta \Phi^I} = 0. \tag{106}$$

Соотношения (105), (106) представляют собой систему уравнений движения для поля Янга-Миллса, взаимодействующего с материей.

Рассмотрим важное следствие калибровочной инвариантности теории с действием $S[\Phi, A]$ (101). Калибровочная инвариантность означает, что

$$S[\Phi + \delta\Phi, A + \delta A] = S[\Phi, A], \tag{107}$$

где $\delta\Phi^I$, $\delta A^a{}_\mu$ - калибровочные вариации полей Φ^I и $A^a{}_\mu$ соответственно. Они даются соотношениями (85), (88). Из равенства (106) в первом порядке по калибровочным параметрам ξ^a имеем

$$\int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta \Phi^I}\delta\Phi^I + \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu \right) = 0. \tag{108}$$

Пусть для полей материи выполняется уравнение движения (второе из уравнений (103)). Тогда первое слагаемое в скобках в (108) обращается в ноль. Подставим в (108) $\delta A^a{}_\mu = D_\mu{}^{ab}\xi^b$ и предположим, что на границе области интегрирования Ω калибровочные параметры $\xi^a(x)$ обращаются в ноль. В случае, когда область Ω совпадает со всем пространством Минковского, предположим, что $\xi^a(x) \to 0$ при $x^\mu \to \pm\infty$. Тогда получим

$$\int\limits_\Omega d^4x \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu} D_\mu{}^{ab}\xi^b = 0$$

или

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu} \left(\partial_\mu \xi^a + g f^{acb} A^c{}_\mu \xi^b\right) = \\ &= \int d^4x \left(-\partial_\mu \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^a{}_\mu} \xi^a + g f^{bca} A^c{}_\mu \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^b{}_\mu} \xi^a\right) = \\ &= -\int d^4x \left[D_\mu{}^{ab} \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^b{}_\mu}\right] \xi^a(x). \end{aligned} \tag{109}$$

Здесь учтено, что на границе области интегрирования Ω параметры $\xi^a(x)$ обращаются в ноль, поэтому при интегрировании по частям поверхностный член не возникает. Поскольку параметры $\xi^a(x)$ произвольны, то из (109) получаем тождество

$$D_\mu{}^{ab} \frac{\delta S[\Phi, A]}{\delta A^b{}_\mu} = 0. \tag{110}$$

Индекс a принимает N значений, поэтому число уравнений движения $\frac{\delta S[\Phi,A]}{\delta A^a{}_\mu} = 0$ равно $4N$. Но эти уравнения удовлетворяют N тождествам (110), поэтому число функционально независимых уравнений движения для поля Янга-Миллса всегда равно $3N$. Следовательно, из этих уравнений невозможно однозначно найти все $4N$ компонент поля $A^a{}_\mu(x)$, N компонент всегда будут произвольными. Данная ситуация не удивительна. Допустим, что мы как-то задали все $4N$ компонент поля $A^a{}_\mu(x)$. Совершим калибровочное преобразование, получим $A'^a{}_\mu(x) = A^a{}_\mu(x) + D_\mu{}^{ab}\xi^b(x)$, содержащее N произвольных параметров $\xi^a(x)$. В силу калибровочной инвариантности, если $A^a{}_\mu(x)$ - решение уравнений движения, то и $A'^a{}_\mu(x)$ - также решение уравнений движения при любых параметрах $\xi^a(x)$. Поэтому N компонент поля $A^a{}_\mu(x)$ всегда могут быть сделаны произвольными. Тождества (110) как раз и обеспечивают выполнение указанного условия. Произвол в определении поля Янга-Миллса означает, что на это поле можно наложить N дополнительных условий, которые называются калибровкой или калибровочными условиями.

В заключении этого раздела приведем конкретный пример теории поля Янга-Миллса с материей. Рассмотрим набор спинорных полей ψ_k;

$k = 1, 2, \ldots, n_f$, преобразующихся по фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Эти поля ассоциируются с кварками, число n_f называется числом ароматов. Обозначим матрицы генераторов в фундаментальном представлении группы $SU(3)$ как $(\lambda_a)^I{}_J$. Теория задается действием

$$
\begin{aligned}
S[\psi, A] &= \int d^4x\{-\frac{1}{4}G^a{}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + \sum_{k=1}^{n_f}[i\bar{\psi}^I{}_K(\delta^I{}_J\partial_\mu - \\
&- igA^a{}_\mu(\lambda_a)^I{}_J)\psi_K{}^J - m_k\bar{\psi}_K{}^I\psi_K{}^I]\}.
\end{aligned}
$$

Индексы I, J принимают значения $1, 2, 3$; индекс a принимает значения $1, 2, \ldots, 8$. Калибровочные поля $A^a{}_\mu(x)$ отождествляются с глюонами. Индексы I, J называются индексами цвета. Инвариантность действия относительно локальной группы $SU(3)$ называется цветовой симметрией. Модель теории поля с данным действием называется хромодинамикой и описывает сильное взаимодействие элементарных частиц.

13 Гравитационное поле

Стандартной теорией гравитационного поля является эйнштейновская общая теория относительности. Мы кратко рассмотрим схему построения общей теории относительности.

В общей теории относительности постулируется, что физическое пространство-время является четырехмерным римановым многообразием с локальными координатами x^μ и метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu.$$

В каждой фиксированной точке многообразия с помощью преобразования координат метрику можно привести к виду $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, то есть такое преобразование свое в каждой точке. Ни в какой конечной области привести метрику к указанному виду невозможно. Координаты определены неоднозначно, а с точностью до преобразований вида $x'^\mu = x'^\mu(x)$, которые называются общекоординатными преобразованиями. При этих преобразованиях компоненты метрики преобразуются в виде

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x). \tag{111}$$

Физические величины формулируются с помощью тензорных полей с компонентами $T^{\mu_1 \ldots \mu_n}{}_{\nu_1 \ldots \nu_m}(x)$, которые при общекоординатных преобразованиях преобразуются так

$$T'^{\mu_1 \ldots \mu_n}{}_{\nu_1 \ldots \nu_m}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}(x).$$

Не трудно заметить, что обычная частная производная тензорного поля не является тензорным полем. Этим свойством обладает ковариантная производная ∇_μ. Например, для векторного поля ковариантная производная имеет вид

$$\nabla_\mu T^\nu = \partial_\mu T^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} T^\alpha,$$

где функции $\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}(x)$ называются коэффициентами связности. Заметим, что выражение $\nabla_\mu T^\nu$ можно записать так

$$\nabla_\mu T^\nu = [\delta^\nu{}_\alpha \partial_\mu + (\Gamma_\mu)^\nu{}_\alpha] T^\alpha,$$

где обозначено $(\Gamma_\mu)^\nu{}_\alpha = \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}$. Теперь легко увидеть аналогию с ковариантной производной в теории поля Янга-Миллса.

Постулируется тождество $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, ведущее к соотношению

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} = 0.$$

Последнее уравнение позволяет выразить $\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}$ в терминах метрики и ее производных в виде

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}),$$

где $g^{\alpha\beta}$ - матрица, обратная к $g_{\alpha\beta}$, то есть $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$, $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$. Коэффициенты связности, выраженные из уравнения $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ называются символами Кристоффеля.

Вычислим коммутатор ковариантных производных, действующих на векторное поле. Получим

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}T^\beta,$$

где

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} = \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\tau{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\tau\beta} - \Gamma^\tau{}_{\mu\beta}\Gamma^\alpha{}_{\tau\nu}.$$

Величины $R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}$ являются компонентами тензорного поля четвертого ранга, называемого тензором кривизны Римана-Кристоффеля или просто тензором кривизны. Существует теорема, согласно которой, если тензор кривизны не равен нулю, то метрику $g_{\mu\nu}(x)$ не возможно привести с помощью преобразований координат к виду $\eta_{\mu\nu}$ в любой конечной области многообразия. И наоборот, если метрику с помощью преобразования координат можно привести к виду $\eta_{\mu\nu}$ в конечной области многообразия, то тензор кривизны в этой области равен нулю. При этом, если тензор кривизны не обращается в ноль, то многообразие называется искривленным. В противном случае оно называется плоским.

Постулируется, что гравитация есть проявление кривизны пространства-времени, другими словами гравитация представляет собой свойство искривленного пространства-времени. Поскольку искривленное пространство-время характеризуется ненулевым тензором кривизны, то тензор кривизны трактуется как напряженность гравитационного поля.

Используя тензор кривизны $R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}$, можно ввести тензор второго ранга $R_{\mu\beta} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\beta}$, называемый тензором Риччи и скаляр $R = g^{\mu\beta}R_{\mu\beta}$, называемый скалярной кривизной. Модель теории поля с действием

$$S_E[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - \Lambda) \tag{112}$$

называется общей теорией относительности или эйнштейновской гравитацией. Здесь $g = det g_{\mu\nu}$; κ^2 и Λ - константы, называемые гравитационной постоянной и космологической постоянной соответственно. В этой модели динамическими переменными являются компоненты метрики $g_{\mu\nu}(x)$. По построению действие (112) инвариантно относительно общекоординатных преобразований.

В рамках той же системы геометрических идей эйнштейновской общей теории относительности можно сформулировать и другие модели гравитационного поля, используя в качестве лагранжиана различные функции тензора кривизны, $\mathcal{L} \sim f_1(R) + f_2(R_{\nu\nu}) + f_3(R_{\mu\nu\alpha\beta})$, где f_1, f_2, f_3 - произвольные скалярные функции своих аргументов. Такие модели иногда применяются при изучении различных вопросов гравитационной феноменологии, однако в общем случае они содержат гигантский функциональный произвол или, что тоже самое, содержат бесконечное количество произвольных размерных параметров. Если потребовать наличие только безразмерных параметров, мы практически однозначно приходим к следующему обобщению действия эйнштейновской гравитации

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2\kappa^2}(R-\Lambda) + aR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + bR^2\right\}, \qquad (113)$$

где a и b - безразмерные константы. Эта модель называется R^2-гравитацией. Действие (113) также как и действие (112), инвариантно относительно общекоординатных преобразований. Отличие теории гравитации с действием (113) от эйнштейновской гравитации состоит в том, что в эйнштейновской гравитации уравнения движения второго порядка, а в теории с действием (113) - четвертого порядка. То есть, R^2-гравитация это пример теории с высшими производными. Интересно отметить, что теория с действием

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^4x\sqrt{-g}f(R)$$

не содержит высших производных в уравнениях движения при любой функции $f(R)$.

При общекоординатных преобразованиях компоненты метрики $g_{\mu\nu}(x)$ преобразуются согласно (111), а действия (112), (113) остаются инвариантными. Другими словами, заданы локальные преобразования динамических переменных, относительно которых действие инвариантно. Это типичная ситуация для теории калибровочного поля. По этой причине в теории гравитации общекоординатные преобразования играют роль калибровочных преобразований. Найдем бесконечно малую форму таких преобразований. Запишем $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, где $\xi^{\mu}(x)$ - вектор с бесконечно малыми компонентами. Рассмотрим соотношение (111) и используем в нем бесконечно малое общекоординатное преобразование. Имеем

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x),$$

где $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$. Переобозначим $x'^{\mu} \leftrightarrow x^{\mu}$, тогда получим

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x').$$

Из соотношения $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ найдем

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\alpha}{}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha}(x). \tag{114}$$

Следовательно

$$g'_{\mu\nu}(x) = (\delta^{\alpha}{}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha})(\delta^{\beta}{}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\beta}) g_{\alpha\beta}(x+\xi)$$

или

$$g'_{\mu\nu}(x) = (\delta^{\alpha}{}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha})(\delta^{\beta}{}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\beta})(g_{\alpha\beta}(x) + \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\xi^{\gamma}.$$

Отсюда с точностью до членов линейных по ξ^{μ} имеем

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \partial_{\mu}\xi^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\alpha} g_{\mu\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}\xi^{\alpha}.$$

Следовательно

$$\delta g_{\mu\nu} = D_{\mu\nu,\alpha}\xi^{\alpha}, \tag{115}$$

где

$$D_{\mu\nu,\alpha} = g_{\alpha\nu}\partial_{\mu} + g_{\mu\alpha}\partial_{\nu} + \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}. \tag{116}$$

Выражение $D_{\mu\nu,\alpha}$ (116) называется генератором общекоординатных преобразований, а функции $\xi^{\alpha}(x)$ - параметрами общекоординатных преобразований. Покажем, что $\delta g_{\mu\nu}$ можно записать так

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \tag{117}$$

где $\xi_\mu = g_{\mu\alpha}\xi^\alpha$. Действительно, запишем правую часть (117), используя явный вид ковариантной производной. Имеем

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu &= \partial_\mu \xi_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\xi_\alpha + \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\xi_\alpha = \\
&= \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\xi^\alpha = \partial_\mu(g_{\nu\alpha}\xi^\alpha) + \\
&+ \partial_\nu(g_{\mu\alpha}\xi^\alpha) - g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\xi_\alpha = \\
&= g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha + \partial_\mu g_{\nu\alpha}\xi^\alpha + \partial_\nu g_{\mu\alpha}\xi^\alpha - \\
&- \xi^\alpha(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \\
&= g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha + \partial_\mu g_{\nu\alpha}\xi^\alpha + \partial_\nu g_{\mu\alpha}\xi^\alpha - \\
&- \partial_\mu g_{\alpha\nu}\xi^\alpha - \partial_\nu g_{\mu\alpha}\xi^\alpha + \partial_\alpha g_{\mu\nu}\xi^\alpha = \\
&= \partial_\mu \xi^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \xi^\alpha g_{\mu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}\xi^\alpha.
\end{aligned}$$

Но это совпадает с $D_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha$. Соотношение (117) можно переписать как

$$\delta g_{\mu\nu} = (g_{\nu\alpha}\nabla_\mu + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu)\xi^\alpha, \tag{118}$$

то есть генератор общекоординатных преобразований записывается в явно ковариантной форме

$$D_{\mu\nu,\alpha} = g_{\mu\alpha}\nabla_\nu + g_{\nu\alpha}\nabla_\mu. \tag{119}$$

Найдем уравнения движения в эйнштейновской гравитации. Для этого вычислим вариацию действия (112). Имеем

$$\delta S_E[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\{\delta\sqrt{-g}(R-\Lambda) + \sqrt{-g}\delta R\}.$$

a. Вычислим $\delta\sqrt{-g}$. Напомним, что $g = detg_{\mu\nu}$. Используем тождество $g = e^{trlng_{\mu\nu}}$. Тогда

$$\delta g = e^{trlng_{\mu\nu}} tr(g^{-1})_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \delta(-g)^{1/2} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}(-\delta g) = \\ &= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}(-g)g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{120}$$

Рассмотрим

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) = \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}.$$

b. Вычислим $\delta g^{\alpha\beta}$. Запишем тождество $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$. Отсюда

$$\delta g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} = 0$$

или

$$\delta g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}g^{\nu\beta} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\nu},$$
$$\delta g^{\mu\beta} = -g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}\delta g_{\alpha\nu}$$

или

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{121}$$

Рассмотрим $\delta R_{\alpha\beta}$. По определению

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta} = \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}.$$

То есть, для нахождения $\delta R_{\alpha\beta}$ надо вычислить $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$.

c. Вычисление $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ проводится следующим образом. По определению

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}).$$

Отсюда

$$\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu}).$$

Подставим в последнее выражение $\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}\delta g_{\lambda\sigma}$, получим

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}(\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \\
&- \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} \delta g_{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \qquad (122)
\end{aligned}
$$

С другой стороны рассмотрим выражение

$$
\begin{aligned}
X^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) = \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\{\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\delta g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\beta} + \\
&+ \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}\delta g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\delta g_{\lambda\beta} - \\
&- \partial_\beta \delta g_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}\delta g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu}\delta g_{\mu\lambda}\} = \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\beta}) = \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \qquad (123) \\
&- \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\delta g^{\lambda\beta}.
\end{aligned}
$$

Во второй скобке заменим $\beta \leftrightarrow \sigma$, это дает

$$
-\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g^{\lambda\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\delta g_{\lambda\sigma}.
$$

Теперь заменим $\lambda \leftrightarrow \sigma$, получим

$$
-\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\delta g_{\lambda\sigma}.
$$

Но это выражение точно совпадает со второй скобкой в (122). Первая скобка в (123) совпадает с первой скобкой в (122). Поэтому

$$
\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}). \qquad (124)
$$

Заметим, что $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ является тензором.

d. Вычислим $\delta R_{\alpha\beta}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\alpha\beta} &= \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} + \delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda}\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} + \\
&+ \Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} - \delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}.
\end{aligned} \tag{125}
$$

С другой стороны рассмотрим

$$
Y_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda}.
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
Y_{\alpha\beta} &= \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\beta} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\beta}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} - \\
&- \partial_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\rho} = \\
&= \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} + \\
&+ \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}.
\end{aligned}
$$

Но это точно совпадает с правой частью (125), поэтому

$$
\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda}. \tag{126}
$$

В результате

$$
\begin{aligned}
\delta S_E[g_{\mu\nu}] &= -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}(R-\Lambda) + \\
&+ \sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\} = \\
&= -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R-\Lambda)\delta g_{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta}\delta g_{\mu\nu} + \\
&+ g^{\alpha\beta}(\nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda})\} = \\
&= -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\{-(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Lambda g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \\
&+ \nabla_\lambda[g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\lambda}\delta\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}]\}.
\end{aligned}
$$

Последнее слагаемое с помощью теории Гаусса сводится к интегралу по поверхности, охватывающей область интегрирования. Но вариация $\delta g_{\alpha\beta}$ на этой поверхности обращается в ноль. Кроме того, надо потребовать, чтобы на этой поверхности и производная $\partial_\gamma \delta g_{\alpha\beta}$ обращалась в ноль. С учетом этого

$$\delta S_E[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{1}{2} \Lambda g^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu}.$$

Следовательно

$$\frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \left\{ (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{1}{2} \Lambda g^{\mu\nu} \right\}. \tag{127}$$

Отсюда следуют уравнения движения в эйнштейновской гравитации

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{1}{2} \Lambda g^{\mu\nu}. \tag{128}$$

Уравнения (128) называются уравнениями Эйнштейна.

Помимо гравитационного поля в природе существуют и другие поля, которые в контексте общей теории относительности принято называть полями материи или просто материей. Обозначим такие поля как $\Phi(x)$. Другими словами $\Phi(x)$ - это все поля, существующие в природе, кроме гравитационного. Предполагается, что динамика таких полей описывается действием $S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]$, зависящим от этих полей и метрики $g_{\mu\nu}$. Построение действия $S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]$ является отдельной задачей. Постулируется, что

$$S_M[\Phi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \tag{129}$$

где в простейших случаях лагранжиан $\mathcal{L}_M$ строится на основе принципа минимального включения взаимодействия с гравитацией. Это означает следующее. Пусть в отсутствие гравитации, то есть в плоском пространстве-времени, поля материи есть тензоры или спиноры по отношению к преобразованиям Лоренца. При наличии гравитации их следует считать тензорами и спинорами в искривленном пространстве-времени (понятие спинора в искривленном пространстве требует отдельного определения, которого мы здесь не касаемся). Затем надо заменить плоскую метрику на метрику $g_{\mu\nu}$ искривленного пространства и заменить обычную частную производную на ковариантную производную, принятую в римановой геометрии. В результате получим лагранжиан $\mathcal{L}_M$, который по построению будет являться скаляром относительно общекоординатных преобразований.

Система полей материи и гравитационного поля описывается действием

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi] = S_E[g_{\mu\nu}] + S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]. \tag{130}$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \Phi]}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \qquad \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \Phi]}{\delta \Phi} = 0. \tag{131}$$

Первое из этих уравнений записывается так

$$\frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = 0.$$

С учетом (127) получим

$$\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\left[(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + \frac{1}{2}\Lambda g^{\mu\nu}\right] = -\frac{\delta S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}}$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2}\Lambda g^{\mu\nu} = -\kappa^2 \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Правую часть преобразуем так

$$\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}$$

тогда

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2}\Lambda g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\kappa^2 \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\alpha\beta}}.$$

Выражение

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \tag{132}$$

называется (метрическим) тензором энергии-импульса материи. С учетом этого уравнения движения принимают вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T_{\alpha\beta} = \kappa^2 T^{\mu\nu}.$$

Таким образом, имеем

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T^{\mu\nu}. \qquad (133)$$

Эти уравнения также называют уравнениями Эйнштейна. К ним надо еще добавить уравнения материи

$$\frac{\delta S[g_{\Phi,\mu\nu}]}{\delta\Phi} = 0. \qquad (134)$$

Система уравнений (133), (134) полностью определяет динамику гравитации и материи.

Если по каким-то причинам материей можно пренебречь, то динамика гравитации описывается уравнениями (128). Их можно переписать так

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Lambda.$$

Решения этого уравнения называются пространствами Эйнштейна. Выражение в правой части можно трактовать как тензор энергии-импульса пустого пространства, то есть вакуума

$$T^{\mu\nu}_{vac} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Lambda. \qquad (135)$$

Из уравнения (128) после свертки по индексам μ, ν получим

$$R - \frac{1}{2}4R = -\frac{1}{2}4\Lambda$$

или

$$R = 2\Lambda = const. \qquad (136)$$

При $\Lambda > 0$ уравнение (136) имеет частное решение, называемое пространством де Ситтера (dS) или пространством положительной кривизны. При $\Lambda < 0$ уравнение (136) имеет частное решение, называемое пространством анти де Ситтера (AdS) или пространством отрицательной кривизны.

Рассмотрим важное свойство уравнений Эйнштейна, связанное с общекоординатной инвариантностью действия. Запишем бесконечно малое калибровочное преобразование $\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$. Относительно этого преобразования действие инвариантно, то есть

$$S_E[g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}] = S_E[g_{\mu\nu}].$$

Отсюда

$$\int d^4x \frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 0$$

или

$$\int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 0.$$

Предположим, что на границе области интегрирования калибровочные параметры ξ^μ обращаются в ноль. Тогда можно проинтегрировать по частям и внеинтегральные члены будут отсутствовать. Учитывая, что $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, получим

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \left(\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\mu(x) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\xi_\mu(x)$ получаем тождество

$$\nabla_\nu \left(\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_E[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0. \tag{137}$$

Соотношение (137) имеет важное следствие. Рассмотрим уравнения Эйнштейна без материи. Это есть система из 10 уравнений и на первый взгляд из нее можно найти все 10 компонент метрики $g_{\mu\nu}(x)$. Однако на уравнения Эйнштейна наложены 4 тождества (137), поэтому функционально независимых уравнений только 6 и из них, в принципе, можно найти только 6 компонент поля $g_{\mu\nu}$, 4 компоненты остаются произвольными. Но это не удивительно. Действительно, пусть каким-то образом заданы все 10 компонент поля $g_{\mu\nu}(x)$. Совершим бесконечно малое калибровочное преобразование с произвольными параметрами $\xi_\mu(x)$, получим

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x).$$

Поскольку параметры $\xi_\mu(x)$ произвольны, то поле $g'_{\mu\nu}(x)$ содержит 4 произвольные функции. При этом, в силу калибровочной инвариантности, если $g_{\mu\nu}(x)$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, то и $g'_{\mu\nu}(x)$ также удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. Тождества (137) как раз и указывают на то, что из уравнений Эйнштейна не должно быть возможным найти однозначно все 10 компонент поля $g_{\mu\nu}(x)$. Однако, если по каким-то причинам требуется однозначное нахождение всех 10 компонент поля $g_{\mu\nu}(x)$, то необходимо к уравнениям движения добавить 4 дополнительных калибровочно не инвариантных условия. Такие условия называются калибровками. Примером калибровки в теории гравитации являются условия Фока-де Дондера $\partial_\nu(\sqrt{-g}g_{\mu\nu}) = 0$.

14 Модель массивного симметричного тензорного поля второго ранга

Симметричное тензорное поле второго ранга используется для построения свободного массивного поля со спином 2.

Неприводимое представление группы Пуанкаре с массой m и спином 2 реализуется в пространстве симметричных тензорных полей второго ранга, удовлетворяющих уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0 \tag{138}$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \partial^\mu \varphi_{\mu\nu} &= 0, \\ \eta^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{139}$$

Наша цель состоит в построении свободного лагранжиана, ведущего к уравнениям движения, согласованным с условиями (138), (139). Другими словами, мы ищем лагранжиан такой, что соотношения (138), (139) являются следствием соответствующих уравнений движения.

Пусть $S[\varphi_{\mu\nu}]$ есть искомое действие свободной теории, приводящее к линейным уравнениям движения

$$\frac{\delta S[\varphi_{\mu\nu}]}{\delta \varphi_{\mu\nu}(x)} = 0.$$

Ясно, что уравнения движения должны иметь очень специальный вид, чтобы из них вытекали дополнительные условия (139).

Действительно, из уравнений движения обязаны вытекать три тождества

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu}\frac{\delta S[\varphi_{\alpha\beta}]}{\delta \varphi_{\mu\nu}} &= 0, \\ \partial^\mu \partial^\nu \frac{\delta S[\varphi_{\alpha\beta}]}{\delta \varphi_{\mu\nu}} &= 0, \\ \partial^\mu \frac{\delta S[\varphi_{\alpha\beta}]}{\delta \varphi_{\mu\nu}} &= 0. \end{aligned} \tag{140}$$

Действие $S[\varphi_{\alpha\beta}]$ должно иметь такой вид, чтобы тождества (140) вели к условиям (138), (139). Займемся построением уравнений движения, удовлетворяющих таким требованиям.

Поскольку рассматривается свободное поле, то уравнения движения являются линейными. Наиболее общее уравнение движения, согласованное с лоренц-ковариантностью и не содержащее высших производных, имеет вид

$$\begin{aligned} (\Box &+ m^2)\varphi_{\mu\nu} + a(\partial_\mu \partial^\alpha \varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \varphi_{\mu\alpha}) + \\ &+ b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + c\partial_\mu \partial_\nu \varphi + d\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0. \end{aligned} \tag{141}$$

Здесь обозначено $\varphi = \varphi^\mu{}_\mu$; a, b, c, d - произвольные безразмерные коэффициенты. Также принято во внимание, что в лоренц-ковариантной теории $\Box$ и m^2 должны входить в уравнение движения только в комбинации $\Box + m^2$. Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты a, b, c, d, обеспечивающие выполнение тождеств (140).

a. Умножим уравнение (141) на $\eta^{\mu\nu}$, получим

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\varphi + a(\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}) + \\ &+ b4\partial^\mu\partial^\nu\varphi + c\Box\varphi + 4d(\Box + m^2)\varphi = 0.\end{aligned}$$

или

$$[(1 + c + 4d)\Box + (1 + 4d)m^2]\varphi + 2(a + 2b)\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0. \tag{142}$$

b. Умножим уравнение (141) на $\partial^\mu\partial^\nu$, получим

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} + a(\Box\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} + \Box\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}) + \\ &+ b\Box\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} + c\Box^2\varphi + d\Box(\Box + m^2)\varphi = 0\end{aligned}$$

или

$$[(1 + 2a + b)\Box + m^2]\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} + (c + d)\Box^2\varphi + dm^2\Box\varphi = 0. \tag{143}$$

c. Умножим уравнение (141) на ∂^μ, получим

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + a(\Box\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta}) + \\ &+ b\partial_\nu\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} + c\Box\partial_\nu\varphi + d\Box\partial_\nu\varphi + dm^2\partial_\nu\varphi = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(1 &+ a)\Box\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + (a + b)\partial_\nu\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} + \\ &+ (c + d)\Box\partial_\nu\varphi + dm^2\partial_\nu\varphi = 0.\end{aligned} \tag{144}$$

Обратимся к уравнениям (142), (143). Их можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений для нахождения двух неизвестных величин φ и $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}$. Из (142) получим

$$\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2(a + 2b)}[(1 + c + 4d)\Box + (1 + 4d)m^2]\varphi. \tag{145}$$

Подставим это выражение в (143). Имеем

$$\begin{aligned} - &\frac{1}{2(a+2b)}[(1+2a+b)\Box+m^2][(1+c+4d)\Box+(1+4d)m^2]\varphi+ \\ + &(c+d)\Box^2\varphi+dm^2\Box\varphi=0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\{(1+2a+b)(1+c+4d)\Box^2+[(1+2a+b)(1+4d)+(1+c+4d)]m^2\Box+ \\ &\qquad +(1+4d)m^4\}\varphi-2(a+2b)(c+d)IJ^2-2(a+2b)dm^2\Box\varphi=0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\{[(1+2a+b)(1+c+4d)-2(a+2b)(c+d)]\Box^2+[(1+2a+b)(1+4d)+ \\ &\qquad +(1+c+4d)-2d(a+2b)]m^2\Box+(1+4d)m^4\}\varphi=0. \end{aligned}$$

Это соотношение должно выполняться тождественно. Выберем коэффициенты a, b, c, d так, чтобы

$$\begin{aligned} (1+2a+b)(1+c+4d)-2(a+2b)(c+d) &= 0 \\ (1+2a+b)(1+4d)+(1+c+4d)-2d(a+2b) &= 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Тогда уравнение (**??**) принимает вид

$$(1+4d)m^4\varphi=0. \tag{147}$$

Пусть $(1+4d)\neq 0$. Тогда из (147) следует $\varphi=0$, как и должно быть, согласно второму из условий (139). Подставим найденное выражение $\varphi=0$ в уравнение (145) и получим $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}=0$. Соотношения $\varphi=0$ и $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}=0$ подставим в уравнение (144) и получим

$$(1+a)\Box\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}+m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}=0. \tag{148}$$

Выберем a из условия $(1+a)=0$. Тогда из (148) следует $m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}=0$ или $\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}=0$ как и должно быть согласно первому из условий (139). Подставляя соотношения $\varphi=0$, $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}=0$, $\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}=0$ в исходное уравнение (141), получим $(\Box+m^2)\varphi_{\mu\nu}=0$. Таким образом, уравнение

(141) ведет к условиям (138), (139), если выполнены уравнения $a = -1$ и (146).

Подставим $a = -1$ в (146), получим

$$\begin{aligned}(b-1)(1+c+4d) - 2(2b-1)(c+d) &= 0,\\ (b-1)(1+4d) + (1+c+4d) - 2d(2b-1) &= 0.\end{aligned} \tag{149}$$

В результате мы имеем систему двух алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов b, c и d. Ясно, что из этих уравнений можно определить только два коэффициента, один останется произвольным. Это обстоятельство не случайно, а является следствием структуры уравнения (141).

Совершим в исходном уравнении (141) замену поля $\varphi_{\mu\nu}$ на поле $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$ по правилу

$$\varphi_{\mu\nu} = \bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu}\varphi, \tag{150}$$

где α - произвольный параметр. Отсюда $\varphi = \bar{\varphi} + 4\alpha\varphi$ или $\varphi = \frac{\bar{\varphi}}{1-4\alpha}$. Подставляя (150) в (141), получим

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi +\\ &+ a(\partial_\mu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + 2\alpha a\partial_\mu\partial_\nu\varphi +\\ &+ b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{\varphi}_{\alpha\beta} + \alpha b\eta_{\mu\nu}\Box\varphi + c\partial_\mu\partial_\nu\varphi + d(\Box + m^2)\varphi = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\bar{\varphi}_{\mu\nu} + a(\partial_\mu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + b\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{\varphi}_{\alpha\beta} +\\ &+ \frac{c+2\alpha a}{1-4\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\bar{\varphi} + \frac{d+\alpha}{1-4\alpha}\eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0.\end{aligned} \tag{151}$$

Мы видим, что уравнение (151) совпадает по форме с уравнением (141), но вместо коэффициентов c, d стоят коэффициенты $\frac{c+2\alpha a}{1-4\alpha}$ и $\frac{d+\alpha}{1-4\alpha}$, зависящие от произвольного параметра α. Это означает, что коэффициенты c и d не могут быть найдены однозначно, один из них обязательно произволен, что и отражается в уравнениях (149).

Частное решение уравнений (149) есть $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$. Это вместе с $a = -1$ приводит уравнение (141) к виду

$$
\begin{aligned}
(\Box &+ m^2)\varphi_{\mu\nu} - (\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\varphi_{\mu\alpha}) + \\
&+ \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\nu\varphi - \eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi = 0. \qquad (152)
\end{aligned}
$$

Уравнение (152) есть одна из возможных форм записи уравнения движения массивного симметричного тензорного поля второго ранга. Оно называется уравнением Паули-Фирца.

Перейдем к нахождению лагранжиана. Структура уравнения (152) показывает, что искомый лагранжиан должен иметь вид

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi + \\
&+ \lambda_1\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi_\alpha{}^\nu + \lambda_2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi, \qquad (153)
\end{aligned}
$$

где λ_1, λ_2 - произвольные безразмерные вещественные параметры. Чтобы найти эти параметры, запишем уравнение движения, вытекающее из лагранжиана (153) и сравним с уравнением (152).

Запишем действие

$$
\begin{aligned}
S[\varphi_{\mu\nu}] &= \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi^{\mu\nu} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi + \lambda_1\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi_\alpha{}^\nu + \lambda_2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi\right\}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\delta S[\varphi_{\mu\nu}] &= \int d^4x\{-\frac{1}{2}\delta\varphi_{\mu\nu}(\Box + m^2)\varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\Box + m^2)\varphi_{\mu\nu}\delta\varphi^{\mu\nu} + \\
&+ \frac{1}{2}\delta\varphi(\Box + m^2)\varphi + \frac{1}{2}(\Box + m^2)\varphi\delta\varphi - \lambda_1\delta\varphi_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\alpha\varphi_\alpha{}^\nu - \\
&- \lambda_1\partial^\mu\partial^\alpha\varphi_{\mu\nu}\delta\varphi_\alpha{}^\nu - \lambda_2\delta\varphi_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\varphi - \lambda_2\partial^\nu\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\delta\varphi\}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим $\delta\varphi = \delta(\eta^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}) = \eta^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu}$. Тогда

$$\delta S[\varphi_{\mu\nu}] = \int d^4x\{[-(\Box+m^2)\varphi_{\mu\nu}+\eta_{\mu\nu}(\Box+m^2)\varphi]\delta\varphi^{\mu\nu}-\lambda_1\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu}\delta\varphi^{\mu\nu}-$$
$$-\lambda_1\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu}\delta\varphi^{\mu\nu}-\lambda_2\partial_\mu\partial_\nu\varphi\delta\varphi^{\mu\nu}-\lambda_2\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta}\delta\varphi^{\mu\nu}\} =$$
$$= \int d^4x\{-(\Box+m^2)\varphi_{\mu\nu}+\eta_{\mu\nu}(\Box+m^2)\varphi-\lambda_1(\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu}+$$
$$+\partial_\nu\partial^\alpha\varphi_{\mu\alpha})-\lambda_2\partial_\mu\partial_\nu\varphi-\lambda_2\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta}\}\delta\varphi^{\mu\nu}\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\varphi^{\mu\nu}} &= -(\Box+m^2)\varphi_{\mu\nu}+\eta_{\mu\nu}(\Box+m^2)\varphi- \\ &- \lambda_1(\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu}+\partial_\nu\partial^\alpha\varphi_{\mu\alpha})-\lambda_2\partial_\mu\partial_\nu\varphi-\lambda_2\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

В результате уравнение движения, отвечающее лагранжиану (153), есть

$$\begin{aligned}(\Box &+ m^2)\varphi_{\mu\nu}+\lambda_1(\partial_\mu\partial^\alpha\varphi_{\alpha\nu}+\partial_\nu\partial^\alpha\varphi_{\mu\alpha})+ \\ &+ \lambda_2\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta}+\lambda_2\partial_\mu\partial_\nu\varphi-\eta_{\mu\nu}(\Box+m^2)\varphi = 0.\end{aligned} \quad (154)$$

Сравнивая уравнения (154) и (152), заключаем, что $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Таким образом, лагранжиан свободного массивного симметричного тензорного поля второго ранга имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi_{\mu\nu}\partial_\alpha\varphi^{\mu\nu}-\frac{1}{2}m^2\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi+ \\ &+ \frac{1}{2}m^2\varphi^2-\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi_\alpha{}^\nu+\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi.\end{aligned} \quad (155)$$

Выражение (155) называется лагранжианом Паули-Фирца.

Можно показать, что при $m = 0$ лагранжиан Паули-Фирца совпадает с лагранжианом для гравитационных возмущений $\varphi_{\mu\nu}$, определяемых как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa\varphi_{\mu\nu}$ с последующим разложением действия эйнштейновской гравитации $S_E[g_{\mu\nu}]$ до второго порядка по $\varphi_{\mu\nu}$. При этом лагранжиан гравитационных возмущений инвариантен (с точностью до полной дивергенции) относительно линеаризованных калибровочных преобразований

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu.$$

Массовые члены в лагранжиане (155) нарушают калибровочную инвариантность. В принципе, эту калибровочную инвариантность можно восстановить с помощью введения штюкельберговских полей.

Восстановление калибровочной инвариантности в массивной теории осуществляется следующим образом. Обозначим $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}|_{m^2=0}$, где $\mathcal{L}$ дается (152). Рассмотрим теорию с набором полей $\varphi_{\mu\nu}$, φ_μ и действием

$$\begin{aligned} S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu] &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}^{(0)}(\varphi_{\mu\nu}, \partial_\alpha \varphi_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu)) \times \right. \\ &\times \left. (\varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial^\mu \varphi^\nu + \partial^\nu \varphi^\mu)) + \frac{1}{2} m^2 (\varphi - \frac{2}{m} \partial_\mu \varphi^\mu)^2 \right\}. \qquad (156) \end{aligned}$$

Здесь φ_μ - некоторое векторное поле.

Как мы отмечали, в безмассовом пределе лагранжиан (155) отвечает калибровочно инвариантной теории, где калибровочные преобразования имеют вид $\delta\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$. Подберем калибровочное преобразование для вспомогательного поля φ_μ так, чтобы действие (156) было инвариантно относительно одновременных преобразований $\delta\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ и соответствующего преобразования φ_μ. Заметим, что поле φ_μ входит в действие (156) в комбинации

$$\Phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu),$$

поэтому потребуем, чтобы $\Phi'_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}$. Это означает

$$\varphi'_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi'_\nu + \partial_\nu \varphi'_\mu) = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu).$$

Представим $\varphi'_\mu = \varphi_\mu + \delta\varphi_\mu$, тогда имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &+ \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\mu \delta\varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \partial_\nu \delta\varphi_\mu) = \\ &= \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \delta\varphi_\mu). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{m}(\partial_\mu \delta\varphi_\nu + \partial_\nu \delta\varphi_\mu) = 0.$$

Естественно выбрать
$$\delta\varphi_\mu = m\xi_\mu.$$
Входящее в (156) выражение $\varphi - \frac{2}{m}\partial^\mu\varphi_\mu = \eta^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}$. Поэтому $\varphi - \frac{2}{m}\partial^\mu\varphi_\mu$ также инвариантно относительно преобразований $\delta\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$, $\delta\varphi_\mu = m\xi_\mu$. В итоге, система калибровочных преобразований, оставляющих инвариантным действие (156) имеет вид
$$\begin{aligned}\delta\varphi_{\mu\nu} &= \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu,\\ \delta\varphi_\mu &= m\xi_\mu.\end{aligned}\tag{157}$$

Докажем теперь, что теории с действиями $S[\varphi_{\mu\nu}]$ (152) и $S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]$ (156) эквивалентны, то есть ведут к одинаковым уравнениям движения. Запишем уравнение движения для поля φ_μ. Имеем
$$\begin{aligned}\delta_{\varphi_\mu} S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu] &= \int d^4x \left\{ m^2\Phi^{\mu\nu}\frac{1}{m}(\partial_\mu\delta\varphi_\nu + \partial_\nu\delta\varphi_\mu) - \right.\\ &- \left. m^2(\varphi - \frac{2}{m}\partial^\nu\varphi_\nu)(-\frac{2}{m})\partial^\mu\delta\varphi_\mu \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда
$$\frac{\delta S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]}{\delta\varphi_\mu} = -2\partial^\nu\Phi_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\left(\varphi - \frac{2}{m}\partial^\nu\varphi_\nu\right) = 0$$
или
$$\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\partial^\nu\left(\partial_\mu\varphi_\nu + \partial_\nu\varphi_\mu\right) - \partial_\mu\left(\varphi - \frac{2}{m}\partial^\nu\varphi_\nu\right) = 0$$
или
$$\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} - \partial_\mu\varphi - \frac{1}{m}\left(\partial_\mu\partial^\nu\varphi_\nu + \Box\varphi_\mu - 2\partial_\mu\partial^\nu\varphi_\nu\right) = 0$$
или
$$\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} - \partial_\mu\varphi - \frac{1}{m}\left(\Box\varphi_\mu - \partial_\mu\partial^\nu\varphi_\nu\right) = 0.\tag{158}$$

Поскольку действие инвариантно относительно преобразований (157), то и уравнения движения калибровочно инвариантны. Но тогда можно наложить калибровочные условия, число которых равно числу калибровочных параметров $\xi_\mu(x)$. В частности, в качестве калибровочных условий можно выбрать $\varphi_\mu(x) = 0$. Тогда уравнения (158) примут вид

$$\partial^\nu \varphi_{\mu\nu} - \partial_\mu \varphi = 0. \tag{159}$$

Рассмотрим уравнение движения для поля $\varphi_{\mu\nu}$. Имеем

$$\frac{\delta S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]}{\delta \varphi_{\mu\nu}} = 0.$$

В калибровке $\varphi_\mu = 0$ это уравнение перепишется так

$$\frac{\delta S[\varphi_{\mu\nu}, 0]}{\delta \varphi_{\mu\nu}} = 0. \tag{160}$$

Однако $S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]|_{\varphi_\mu=0} = S[\varphi_{\mu\nu}]$ (152). Поэтому уравнение (160) совпадает с уравнением движения в теории с действием $S[\varphi_{\mu\nu}]$. Но уравнения движения в теории с действием $S[\varphi_{\mu\nu}]$ имеют в качестве следствий соотношения $\varphi = 0$ и $\partial^\nu \varphi_{\mu\nu} = 0$. Поэтому уравнение (159) выполняется тождественно. Таким образом, существует калибровка, в которой уравнения движения в теориях с действиями $S[\varphi_{\mu\nu}]$ и $S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]$ совпадают. Это означает, что две рассматриваемые теории эквивалентны. В результате мы видим, что некалибровочную теорию с действием $S[\varphi_{\mu\nu}]$ можно эквивалентным образом задать как калибровочную теорию с действием $S[\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu]$. Для этой цели вводится вспомогательное штюкельбергово поле φ_μ.

15 Модель антисимметричного тензорного поля второго ранга

Антисимметричное тензорное поле второго ранга появляется естественным образом в моделях теории поля с расширенной суперсимметрией. Наша цель состоит в построении лагранжиана для такого поля. Кроме того, мы покажем, что модель безмассового антисимметричного тензорного поля второго ранга эквивалентна модели безмассового скалярного поля.

Рассмотрим поле $B_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ и предположим, что это поле определено с точностью до калибровочного преобразования

$$B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x), \tag{161}$$

где $\xi_\mu(x)$ - произвольное векторное поле, являющееся параметром данного преобразования. Обратим внимание, что параметр $\xi_\mu(x)$ сам по себе определен неоднозначно. Действительно, пусть $\xi'_\mu = \xi_\mu + \partial_\mu \xi$, где $\xi(x)$ - произвольное скалярное поле. Тогда

$$\begin{aligned} B''_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi'_\nu - \partial_\nu \xi'_\mu = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \\ &+ \partial_\mu \partial_\nu \xi - \partial_\nu \partial_\mu \xi = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu = B'_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Другими словами, если $\xi_\mu = \partial_\mu \xi$, то поле $B_{\mu\nu}$ инвариантно относительно калибровочных преобразований.

Определим полностью антисимметричное тензорное поле $F_{\alpha\beta\gamma}(x)$ соотношением

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta}. \tag{162}$$

При этом

$$\begin{aligned} F_{\beta\alpha\gamma} &= \partial_\beta B_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha B_{\gamma\beta} + \partial_\gamma B_{\beta\alpha} = -\partial_\beta B_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha B_{\beta\gamma} - \partial_\gamma B_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta\gamma} \\ F_{\alpha\gamma\beta} &= \partial_\alpha B_{\gamma\beta} + \partial_\gamma B_{\beta\alpha} + \partial_\beta B_{\alpha\gamma} = -\partial_\alpha B_{\beta\gamma} - \partial_\gamma B_{\alpha\beta} - \partial_\beta B_{\gamma\alpha} = -F_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Покажем, что выражение (162) калибровочно инвариантно. Имеем

$$\begin{aligned} F'_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\alpha B'_{\beta\gamma} + \partial_\beta B'_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (B_{\beta\gamma} + \partial_\beta \xi_\gamma - \partial_\gamma \xi_\beta) + \\ &+ \partial_\beta (B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\gamma) + \partial_\gamma (B_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha) = \\ &= \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta \xi_\gamma - \partial_\alpha \partial_\gamma \xi_\beta + \\ &+ \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha \xi_\gamma + \partial_\gamma \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\gamma \partial_\beta \xi_\alpha = F_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Выражение $F_{\alpha\beta\gamma}$ (162) называется тензором напряженности антисимметричного тензорного поля второго ранга.

Определим модель теории поля с набором полей $B_{\mu\nu}(x)$ и действием

$$S[B] = -\frac{1}{12} \int d^4x F_{\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta\gamma}. \tag{163}$$

Эта модель называется теорией свободного безмассового антисимметричного тензорного поля второго ранга или моделью Огиевецкого-Полубаринова. Запишем уравнения движения в рассматриваемой теории. Имеем

$$\begin{aligned}
\delta S[B] &= -\frac{1}{6}\int d^4x F^{\alpha\beta\gamma}\delta F_{\alpha\beta\gamma} = \\
&= -\frac{1}{6}\int d^4x F^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha\delta B_{\beta\gamma} + \partial_\beta\delta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma\delta B_{\alpha\beta}) = \\
&= \frac{1}{6}\int d^4x(\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma}\delta B_{\beta\gamma} + \partial_\beta F^{\alpha\beta\gamma}\delta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}\delta B_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

Во втором слагаемом заменим $\gamma \to \beta$, $\beta \to \alpha$, $\alpha \to \gamma$ а в третьем заменим $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$. Тогда получим

$$\delta S[B] = \frac{1}{6}\int d^4x\{\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma}\delta B_{\beta\gamma} + \partial_\alpha F^{\gamma\alpha\beta}\delta B_{\beta\gamma} + \partial_\alpha F^{\beta\gamma\alpha}\delta B_{\beta\gamma}\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int d^4x\{\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma} + \partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma} + \partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma}\}\delta B_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\int d^4x\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma}\delta B_{\beta\gamma}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta S[B]}{\delta B_{\beta\gamma}} = \frac{1}{2}\int d^4x\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma}.$$

Следовательно, уравнения движения имеют вид

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{164}$$

или

$$\partial_\alpha(\partial^\alpha B^{\beta\gamma} + \partial^\beta B^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma B^{\alpha\beta}) = 0$$

или

$$\Box B^{\beta\gamma} + \partial^\beta\partial_\alpha B^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma\partial_\alpha B^{\alpha\beta} = 0. \tag{165}$$

Поскольку $F_{\alpha\beta\gamma}$ калибровочно инвариантная величина, то и уравнения движения (165) калибровочно инвариантны.

Покажем, что рассматриваемая теория эквивалентна теории безмассового скалярного поля. Введем векторное поле L^μ по правилу

$$L^\mu = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma}. \tag{166}$$

Отсюда

$$\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}L^{\mu} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta_{\rho}{}^{\beta}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} - \delta_{\lambda}{}^{\alpha}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} +$$
$$+ \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\lambda} + \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\lambda})F_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma},$$

то есть

$$F_{\lambda\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}L^{\mu}. \tag{167}$$

В силу уравнений движения (164) имеем

$$\partial^{\lambda}F_{\lambda\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}\partial^{\lambda}L^{\mu} = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\mu}\partial^{\lambda}L^{\mu} = 0$$

или

$$-2(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\lambda})\partial^{\lambda}L^{\mu} = 0.$$

Это ведет к уравнению

$$\partial^{\alpha}L^{\beta} - \partial^{\beta}L^{\alpha} = 0. \tag{168}$$

Соотношение (168) есть другая форма записи уравнения движения (164). Из соотношения (163) следует

$$\partial_{\mu}L^{\mu} = 0. \tag{169}$$

Уравнение (168) имеет решение

$$L^{\alpha} = \partial^{\alpha}\varphi, \tag{170}$$

где $\varphi(x)$ - произвольное скалярное поле. Подставляя (170) в (169), получим

$$\Box\varphi = 0. \tag{171}$$

Но (169) есть уравнение движения свободного безмассового скалярного поля. Таким образом, мы показали, что уравнения движения (164) для поля $B_{\alpha\beta}$ тождественными преобразованиями сводятся к уравнению (171) для скалярного поля $\varphi(x)$. Отсюда следует, что на уравнениях движения теория свободного безмассового антисимметричного тензорного поля эквивалентна теории свободного безмассового скалярного поля. Связь между $B_{\mu\nu}$ и φ дается соотношением (167), если в него подставить (170), то есть

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\partial^{\mu}\varphi. \tag{172}$$

Подставим (171) в действие $S|B|$ (163). Получим

$$\begin{aligned} S|B| &= -\frac{1}{12}\int d^4x\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\partial^{\mu}\varphi\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}\partial_{\nu}\varphi = -\frac{1}{12}(-6)\int d^4x\delta_{\mu}{}^{\nu}\partial^{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi = S[\varphi]. \end{aligned} \tag{173}$$

Мы видим, что при выполнении (170) действие $S|B|$ для поля $B_{\mu\nu}$ сводится к действию свободного безмассового скалярного поля.

Литература

1. В. А. Рубаков, Классические калибровочные поля, Эдиториал УРРС, Москва, 1999.

2. М.Пескин, Д. Шредер, Введение в квантовую теорию поля, РХД, Москва-Ижевск, 2001.

3. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, НАУКА, Гл.ред.физ-мат.лит-ры, Москва, 1976.

4. Л. Райдер, Квантовая теория поля, МИР, Москва, 1987.

5. П. Рамон, Теория поля. Современный вводный курс, МИР, Москва, 1984.

6. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, Квантовая теория поля, Том 1, Том 2, МИР, Москва, 1984.

7. К. В. Степаньянц, Классическая теория поля, ФИЗМАТЛИТ, Москва,2009.

8. С. Вайнберг, Квантовая теория поля, Том 1, Том 2, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2003.

9. Брайс С. ДеВитт, Динамическая теория групп и полей, НАУКА, Гл.ред.физ-мат.лит-ры, Москва, 1987.

10. I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.

Учебное издание

Иосиф Львович Бухбиндер

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск: Л. В. Домбраускайте.
Подписано в печать: 12.12.2012. Сдано в печать: 20.12.2012. Печать трафаретная.
Бумага офсетная. Формат: 60x84/16. Тираж: 100 экз. Заказ: 1084/У. Уч.-изд. л.: 4,65.

Отпечатано в типографии Томского государственного педагогического университета.
г. Томск, ул. Герцена, 49. Тел. (3822) 52-12-93. E-mail: tipograf@tspu.edu.ru