

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГПУ)



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б.3.В.02 «АЛГЕБРА»

ТРУДОЁМКОСТЬ (В ЗАЧЁТНЫХ ЕДИНИЦАХ) _____14_____

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование

Профили подготовки: Математика и Информатика

Степень (квалификация) выпускника – бакалавр

Форма обучения: очная

1. Цели изучения учебной дисциплины

Целью дисциплины является формирование научного представления об основных понятиях алгебры, развитие логического мышления и формирование первичных навыков научного исследования и самостоятельной работы. Этот курс является необходимым компонентом фундаментальной подготовки математиков.

Основной задачей изучения дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков по алгебре.

2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы

Данная дисциплина относится к вариативной части профессионального цикла. Она является неотъемлемой частью профессионального математического образования студента.

Для освоения данной дисциплины требуются математические знания, полученные в курсе средней школы.

Дисциплины, для успешного усвоения которых требуется изучение дисциплины «Алгебра»: «Математический анализ», «Геометрия», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дискретная математика и математическая логика», «Теория функций комплексного переменного», «Элементарная математика», «Элементы алгебры в классах с углублённым изучением математики», «Преподавание в классах с углубленным изучением математики», «Решение олимпиадных задач по математике», «История математики».

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Алгебра» направлен на формирование следующих компетенций:

Общекультурные компетенции (ОК):

- владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу и восприятию информации (ОК 1);
- способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности (ОК 4);
- способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК 6).

Профессиональные компетенции (ПК):

- осознание социальной значимости своей будущей профессии (ОПК 1);
- готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия теории множеств, теории бинарных отношений, теории отображений, теории комбинаторики;
- элементы теории чисел;
- основные алгебраические структуры;
- элементы теории матриц и определителей;
- элементы теории линейных пространств;
- элементы теории многочленов;
- знание теории числовых систем;
- формулировки и доказательства основных теорем курса «Алгебра».

Уметь:

- оперировать следующими понятиями: равенство множеств, подмножество, операции над множествами, бинарное отношение, отображение;
- решать комбинаторные задачи;
- выполнять матричные вычисления;

- вычислять определители;
- исследовать системы линейных уравнений.

Владеть:

- навыками самостоятельной работы и умением находить и перерабатывать дополнительную информацию в прикладных задачах;
- навыками доказательства методом математической индукции, методом от противного.

4. Общая трудоемкость дисциплины 14 зачётных единиц и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Трудоемкость (в соответствии с учебным планом) (час)	Семестры			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия	213 (в том числе в интеракт. – 44)	57 (в том числе в интеракт. – 12)	63 (в том числе в интеракт. – 12)	57 (в том числе в интеракт. – 12)	36 (в том числе в интеракт. – 8)
Лекции	96	38	21	19	18
Практические занятия	117	19	42	38	18
Семинары					
Лабораторные работы					
Другие виды аудиторных работ					
Другие виды работы					
Самостоятельная работа	210	56	60	56	38
Курсовой проект (работа)					
Реферат					
Расчетно-графические работы					
Формы текущего контроля					
Формы промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом	81	зачёт	Экзамен 27	Экзамен 27	Экзамен 27

5. Содержание программы учебной дисциплины

5.1. Содержание учебной дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной работы (час) (в соответствии с учебным планом)				Самост. работа
		Всего часов	Лекции	ПЗ	В т.ч. интерактивные формы обучения (не менее 20%)	
1-й семестр						
1.	Элементы теории множеств	6	6		2	8
2.	Элементы комбинаторики	4	4		2	8
3.	Бинарные отношения	8	8		4	8
4.	Отображения	8	6	2	2	8
5.	Мощность множеств	4	2	2	2	8
6.	Элементы теории делимости	10	4	6		8
7.	Элементы теории сравнений	17	8	9		8
2-й семестр						
8.	Основные алгебраические системы	22	4	8	2	10
9.	Поле комплексных чисел	12	4	8	4	10

10.	Алгебра матриц	10	4	6	2	10
11	Теория определителей	12	4	8	2	10
12.	Исследование систем линейных уравнений	11	3	8	2	10
13.	Линейные операторы	6	2	4		10
3-й семестр						
14.	Кольцо многочленов от одной неизвестной	15	5	10	4	14
15.	Теория делимости в кольце многочленов	15	5	10	4	14
16.	Теория сравнений в кольце многочленов и расширения полей	14	5	9	4	14
17.	Распределение корней многочлена	13	4	9		14
4-й семестр						
18.	Основные классы алгебраических систем	4	2	2	2	6
19.	Аксиоматическая теория натурального числа	8	4	4	2	6
20.	Аксиоматическая теория \mathbf{Z}	4	2	2		6
21.	Аксиоматическая теория \mathbf{Q}	4	2	2	2	6
22.	Различные системы модели \mathbf{R}	12	6	6	2	8
23.	Аксиоматическая теория \mathbf{C}	4	2	2		6
ИТОГО:		213 / 5,92 з. ед.	96	117	44 / 20,6%	210

5.2. Содержание разделов учебной дисциплины

№	Тема	Содержание
1	Элементы теории множеств	Понятие множества. Числовые множества. Пустое множество, универсальное множество. Подмножество. Равенство множеств. Метод математической индукции. Булеан множества. Операции над множествами: пересечение, объединение, разность, дополнение. Свойства операций.
2	Элементы комбинаторики	Перестановки, размещения, сочетания. Правило произведения. Вывод формул для вычисления количества перестановок, размещений, сочетаний. Бинома Ньютона.
3	Бинарные отношения	Декартово произведение множеств. Понятие бинарного отношения (б. о.). Операции над бинарными отношениями: пересечение, объединение, разность, дополнение, инверсия, произведение. Свойства б.о.: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Отношение эквивалентности. Понятие разбиения. Теоремы о связи между разбиениями и эквивалентностями. Отношение порядка. Линейно упорядоченное и

		частично упорядоченные множества. Наибольший и наименьший; максимальный и минимальный элементы.
4	Отображения	Понятие отображения. Образ и прообраз. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Произведение (композиция) отображений. Свойства операции произведения. Теорема о произведении инъективных и сюръективных отображений. Тожественное (единичное) отображение. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
5	Мощность множеств	Понятие равномощности множеств. Конечные и бесконечные множества. Основная теорема о конечных множествах. Примеры счётных множеств. Пример множества, не являющегося счётным. Теорема Кантора.
6	Элементы теории делимости	Отношение делимости и его свойства. Алгоритм Евклида. Каноническое разложение целых чисел. Теорема Евклида. НОД и НОК чисел. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
7	Элементы теории сравнений	Определение сравнимости целых чисел по модулю m и его простейшие свойства. Признаки делимости. Множество классов вычетов. Операции на этом множестве. Полная и приведённая система вычетов. Функция Эйлера. Теоремы Ферма и Эйлера.
8.	Основные алгебраические системы	Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральный и симметричный элементы. Алгебраическая система. Изоморфизм алгебраических систем: определение и простейшие свойства. Группы, определение и примеры. Группа подстановок. Циклическая группа. Подгруппа. Критерий подгруппы. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальный делитель. Фактор-группа. Кольца, определение и примеры. Простейшие свойства кольца. Делители нуля. Подкольцо, критерий подкольца. Поле, определение и примеры. Характеристика поля. Простейшие свойства поля. Подполе, критерий подполя.
9.	Поле комплексных чисел	Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма записи. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи. Сопряжённое число. Циклическая мультипликативная группа с образующим элементом i . Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Их геометрическая интерпретация. Формула Муавра и следствие из неё. Теорема об извлечении корней n -ой

		степени из комплексного числа z . Группа корней n -ой степени из 1.
10.	Алгебра матриц	Определение матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами и их свойства. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Определение обратной матрицы, её свойства.
11.	Теория определителей	Определители второго и третьего порядков. Определение определителя (детерминанта) n -го порядка. Перестановки и подстановки. Инверсия. Член и знак определителя n -ого порядка. Свойства определителя n -ого порядка. Минор и его алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа и её следствия. Вырожденные и невырожденные матрицы.
12.	Исследование систем линейных уравнений	Система из n линейных уравнений с n неизвестными. Обратная матрица. Критерий обратимости матриц. Правило Крамера. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы и её следствие. Элементарные преобразования матриц. Алгоритмы вычисления ранга матрицы. Условие совместности системы линейных уравнений. Однородная система. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
13.	Линейные операторы	Определение и примеры. Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора. Операции над линейными операторами и их свойства. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.
14.	Кольцо многочленов с одной переменной	Построение кольца многочленов с одной переменной. Старший член и степень многочлена. Схема Горнера и теорема Безу. Число корней многочлена в коммутативной области целостности. Теорема о разложении многочлена в алгебраически замкнутом поле.
15.	Теория делимости в кольце многочленов	Делимость в кольце. Ассоциированные многочлены. Неразложимые многочлены. Деление с остатком. НОД многочленов. Свойства взаимно простых многочленов. Неприводимые многочлены. Каноническое разложение над полем \mathbf{R} и над полем \mathbf{C} . Многочлены с целыми коэффициентами. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Редукция многочленов с целыми коэффициентами по числовому модулю. Задача о приводимости многочлена над полем \mathbf{Q} . Редукционный признак неприводимости многочлена. Признак неприводимости Эйзенштейна.
16.	Теория сравнений в кольце многочленов и расширения полей	Кольцо вычетов по многочлену. Простое расширение поля. Алгебраическое и трансцендентное расширения поля.
17.	Распределение корней многочлена	Распределение вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами. Теорема Штурма.
18.	Основные классы алгебраических систем	Алгебраические системы с одной и двумя бинарными операциями. Гомоморфизм и изоморфизм. Теорема о конгруэнции. Принцип расширения. Упорядоченные

		кольца и поля, их свойства.
19.	Аксиоматическая теория натурального числа	Формулировка аксиоматической теории натурального числа. Построение полукольца на множестве \mathbf{N} . Введение порядка на \mathbf{N} и его свойства. Метод математической индукции.
20.	Аксиоматическая теория \mathbf{Z}	Формулировка аксиоматической теории целого числа. Свойства кольца целых чисел. Упорядочивание кольца \mathbf{Z} . Свойства аксиоматической теории \mathbf{Z} .
21.	Аксиоматическая теория \mathbf{Q}	Формулировка аксиоматической теории рационального числа. Свойства поля \mathbf{Q} . Представление рациональных чисел десятичными дробями. Упорядочивание поля \mathbf{Q} . Свойства аксиоматической теории \mathbf{Q} .
22.	Различные системы модели \mathbf{R}	Различные подходы к определению системы действительного числа. Построение модели \mathbf{R} по Вейерштрассу. Формулировка аксиоматической теории \mathbf{R} . Теоремы о существовании супремума, извлечении корней.
23.	Аксиоматическая теория \mathbf{C}	Формулировка аксиоматической теории комплексного числа. Свойства поля \mathbf{C} . О порядках на \mathbf{C} . Модель \mathbf{C} .

5.3. Лабораторный практикум

Не предусмотрен

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы по дисциплине

6.1. Основная литература по дисциплине:

1. Забарина, А. И. Элементы теории множеств : методические указания для 1 курса ФМФ / А. И. Забарина, Е. А. Фомина ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО ТГПУ. – Томск : Издательство ТГПУ, 2009. – 24 с.
2. Забарина, А. И. Алгебра: понятие отображения : учебно-методическое пособие / А. И. Забарина, Г. Г. Пестов, Е. А. Фомина; МОиН РФ, ФГБОУ ВПО ТГПУ. – Томск : Издательство Томского государственного педагогического университета, 2013. – 64 с.
3. Купцов, А. И. Вводный курс математики : учебное пособие для вузов / А. И. Купцов ; МОиН РФ, ФГБОУ ВПО ТГПУ. – Томск : Издательство Томского государственного педагогического университета, 2013. – 95 с.
4. Купцов, А. И. Алгебра : индивидуальные задания для студентов 1 курса ФМФ : учебно-методическое пособие / А. И. Купцов ; МОиН РФ, ФГБОУ ВПО ТГПУ. –Томск : Издательство Томского государственного педагогического университета, 2013. – 39 с.
5. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории : учебное пособие / [В. Ю. Вдовин, Л. В. Михалева, В. М. Мухина и др.]. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 185 с.
6. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – Изд. 11-е, испр. – Москва : Физматлит, 2007. – 159 с.
7. Судоплатов, С. В. Дискретная математика / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – изд. 2-е, перераб. – Москва : ИНФРА-М, 2009. – 255 с.

6.2. Дополнительная литература:

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – 2-е изд. – Москва : Издательство МГУ, 2002. – 319 с.
2. Ким, Г. Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи: Учебное пособие / Г. Д. Ким, Л. В. Крицков; Под ред. В. А. Ильина. – Москва : Зерцало. Т. 1. – 2003. – 430 с.

3. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебное пособие для вузов / А. Г. Курош. – Изд. 17-е, стереотип. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008. – 431 с.
4. Ларин, С. В. Числовые системы / С. В. Ларин. – Москва : Академия, 2001. – 157 с.
5. Судоплатов, С. В. Элементы дискретной математики / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – Москва : ИНФРА – М, 2007. – 279 с.
6. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2002. – 415 с.

6.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

1. Интернет-тест по математике: <http://www.mathtest.ru>
2. Математический интернет-портал «Вся математика»: <http://www.allmath.ru>
3. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru>

6.4. Рекомендации по использованию информационных технологий, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

№ п/п	Наименование раздела (темы) учебной дисциплины	Наименование материалов обучения, пакетов программного обеспечения	Наименование технических и аудиовизуальных средств, используемых с целью демонстрации материалов
1	1-5, 8-12, 17-16, 18-22 (см. таб. 5.1)	Табличный процессор (Microsoft Office Excel). Набор электронных презентаций	Мультимедийный компьютерный класс, интерактивная доска, наличие локальной и глобальной сети.

7. Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

7.1. Методические рекомендации для студентов

Студентам рекомендуется после лекции самостоятельно проработать полученный материал, отмечая непонятные места. С вопросами нужно обращаться к преподавателю на консультации или следующей лекции. После каждого практического занятия студенты получают домашнее задание, обязательное для выполнения. Выполнение домашних и самостоятельных работ влияет на оценку на экзамене.

7.2. Методические рекомендации преподавателю

Данный курс реализуется посредством чтения лекций, проведения практических занятий и консультаций. С целью выработки у студентов навыков самостоятельной работы с литературой, некоторые вопросы излагаются в обзорном порядке. Предполагается, что отдельные выводы и доказательства будут проведены самостоятельно, с последующим отчетом на консультации.

8. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

8.1. Тематика рефератов

Не предусмотрено.

8.2. Вопросы и задания для самостоятельной работы, в том числе групповой самостоятельной работы обучающихся

1-й семестр

- Докажите ассоциативность операции пересечения над множествами:
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- Докажите дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Докажите закон де-Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Сформулируйте определения теоретико-множественных операций над бинарными отношениями, заданными на множестве A .
- Докажите, что если в упорядоченном множестве существуют наименьший элемент, то он единственный.
- Докажите, что диагональ Δ_A множества A является и эквивалентностью, и отношением порядка.
- Приведите примеры счётных подмножеств множества \mathbf{N} .

2-й семестр

- Являются следующие операции бинарными алгебраическими на \mathbf{Z} :

а) $a * b = -3(a + b)$;	б) $a * b = \text{ОД}\{a, b\}$;
в) $a * b = \text{НОД}\{a, b\}$;	г) $a * b = \max\{a, b\}$;
д) $a * b = \frac{1}{2}(a + b)$;	е) $a * b = a^b$.

- Являются следующие операции бинарными алгебраическими на \mathbf{N} :

а) $a * b = -3(a + b)$;	б) $a * b = a - b$;
в) $a * b = 3a + 2b$;	г) $a * b = \max\{a, b\}$;
д) $a * b = \text{НОК}\{a, b\}$;	е) $a * b = a + a^b$.

- Являются ли сложение и умножение бинарными алгебраическими операциями на множестве $\{1, 2, 3\}$?

4. Дано множество элементов $a + \sqrt{6}b$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, с операцией \cdot (умножение). Тогда элемент, симметричный $5 + 2\sqrt{6}$ равен: $-5 + 2\sqrt{6}$; $5 - 2\sqrt{6}$; $-5 - 2\sqrt{6}$; нет симметричного.

- Дана мультипликативная группа $\langle G, \cdot \rangle$. Тогда верными являются утверждения:

- Операция умножения ассоциативна;
- Все элементы, кроме нейтрального, имеют обратный;
- Операция, обратная к умножению не выполнима в G ;
- Во множестве G существует элемент, у которого нет обратного;
- операция умножения коммутативна;
- Во множестве G существует нейтральный элемент – нуль.

6. Запишите элементы подгруппы H симметрической группы S_4 , которая состоит из подстановок, отвечающих всем самосовмещениям квадрата. Является ли она циклической?

7. Выпишите все подгруппы группы H из задания 6. Какие из них являются циклическими?

- Решите уравнения:

- в группе S_3 : $\tau_3 x = \tau_5$;
- в алгебраической системе $\langle \mathbf{Z}_6, \cdot \rangle$: $\bar{4}x = \bar{3}$;
- в алгебраической системе $\langle \mathbf{Z}_6, \cdot \rangle$: $\bar{5}x = \bar{3}$.

9. Найдите фактор-группу группы $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ по подгруппе $\langle 4\mathbf{Z}, + \rangle$.

10. Докажите, что алгебраическая система $\langle 2^U, \Delta, \cap \rangle$ является кольцом. Укажите делители нуля данного кольца.

11. Выпишите все подкольца кольца $\langle \mathbf{Z}_{12}, +, \cdot \rangle$.

12. Докажите, что алгебраическая система $\langle \mathbf{Q}, \oplus, \otimes \rangle$, где $x \oplus y = x + y - 1$ и $x \otimes y = x + y - xy$, является полем.

3-й семестр

1. Найдите сумму и произведение многочленов.

а) $f(x) = 2 + (1 + i)x - 3ix^2$; $g(x) = -2ix + ix^3 + x^4 \in \mathbf{Z}[i][x]$;

б) $f(x) = 2 + x - 3x^3 + 4x^4$; $g(x) = 3 - 6x + 2x^3 \in \mathbf{Z}_7[x]$.

2. Используя схему Горнера, разделите многочлен $f(x)$ на $(x - a)$:

а) $\mathbf{Z}_7[x]$: $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2$, $a = 2$;

б) $\mathbf{Z}_{11}[x]$: $f(x) = 7x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 10x - 6$, $a = -3$.

3. Используя схему Горнера, найдите $f(a)$:

а) $\mathbf{Z}_5[x]$: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$, $a = 3$;

б) $\mathbf{Z}_7[x]$: $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 + 4x - 3$, $a = -2$.

4. Пользуясь схемой Горнера, составьте таблицу значений $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - 1 \in \mathbf{Z}_7[x]$ и найти его корни.

5. В кольце $\mathbf{Z}_p[x]$ найдите многочлен $g(x)$ меньшей степени, эквивалентный многочлену $f(x)$.

а) $f(x) = 4x^9 - 3x^7 + 2x^6 + 3x^3 - 3x^2 - x - 1$, $p = 5$;

б) $f(x) = 2x^{35} - 6x^{15} + 2x^8 - 3x^5 + x + 5$, $p = 11$;

в) $f(x) = -2x^{29} + 5x^{28} + 7x^{18} + 2x^{17} - 4x^{16} + 4x^{15} + 6x^6 - 4x^3 - 3x^2 - 8x + 2$, $p = 13$.

6. Определите количество вещественных корней следующих многочленов. Укажите количество отрицательных и положительных корней:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$.

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе.

$$\frac{10\sqrt[3]{2} - 10}{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2}$$

8. Разложите на неприводимые множители многочлены $f_1(x) = x^3 + x + 1$ и $f_2(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$ над полем \mathbf{Z}_2 .

9. Разложите многочлен $x^4 + 1$ на неприводимые множители над полями \mathbf{C} и \mathbf{R} .

10. По данным простым корням: $1, -1, i$ постройте многочлены наименьшей степени над полями \mathbf{C} и \mathbf{R} .

11. Найдите целые корни многочлена $60x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.

12. Докажите неприводимость многочлена $2x^5 - 15x^3 + 21x - 24$.

13. Пользуясь определением, докажите, что число $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ – алгебраическое.

4-й семестр

1. Теорема о свойствах сюръективного гомоморфизма алгебраических систем с двумя бинарными алгебраическими операциями.

2. Определить умножение на \mathbf{N} и изучить его свойства.

3. Количественная теория \mathbf{N} .

4. Система аксиом ZFC. Аксиома выбора.

5. Указать в модели Z числа $10, -10, 0$. Убедиться, что $10 + (-10) = 0$.

6. Пусть a/b – правильная несократимая дробь, где $b = 2^i \cdot 5^j \cdot c$. Исследовать вопрос о длине периода.

7. Построить на множестве $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ модель теории \mathbf{C} .

8.3. Вопросы для самопроверки, диалогов, обсуждений, дискуссий, экспертиз

1-й семестр

1. Какая бинарная операция над множествами не обладает свойством коммутативности?

2. Сколько элементов содержится в булеане 10-элементного множества?
3. Перечислите элементы декартова произведения множеств $B = \{1, 2, 3\}$ и $A = \{a, c\}$.
4. Что называется бинарным отношением, заданным на множестве A ?
5. Пусть на множестве A задано бинарное отношение α . Чем отличаются бинарные отношения $\bar{\alpha}$ и α^{-1} ?
6. Какое бинарное отношение называется отношением эквивалентности?
7. Является ли отношение делимости на множестве целых чисел отношением порядка? Обоснуйте.
8. Какое отображение называется сюръективным?
9. Является ли отображение $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = x^2 + 1$ биективным?
10. Каких сочетаний будет больше: из 10 элементов по 3 элемента или из 10 элементов по 7 элементов?
11. Сколько слагаемых в разложении $(a + b)^{101}$ по биному Ньютона?
12. Является ли множество натуральных чисел, кратных пяти равномошным множеству целых чисел, кратных 15?
13. Что позволяет найти алгоритм Евклида?
14. Являются ли числа 9, 16 и 25 попарно взаимно простыми?
15. Что такое каноническое разложение натурального числа?
16. Сравнимы ли числа 11 и -13 по модулю 6?
17. Что общего у признаков делимости на 4, 25 и 50?
18. Делится ли число 1.233.518 на 11?
19. Чему равно значение функции Эйлера $\varphi(450)$?
20. Почему можно считать, что малая теорема Ферма является частным случаем теоремы Эйлера?

2-й семестр

1. Какой элемент называется симметричным к элементу x относительно операции \circ ?
2. Что называется подстановкой 4-й степени?
3. Какая группа называется циклической?
4. Что такое нормальный делитель группы?
5. Какие элементы кольца называются делителями нуля?
6. Какая алгебраическая система называется полем?
7. Чему равно $(1 + i)^4$?
8. Какие комплексные числа в тригонометрической форме записи называются равными?
9. Сколько существует корней 8 степени из числа -256 в поле \mathbf{C} ?
10. Для каких матриц определена операция умножения?
11. Какие элементы образуют инверсию в следующей перестановке (13425687)?
12. Является ли произведение $a_{21}a_{12}a_{34}a_{43}a_{56}a_{61}$ членом определителя шестого порядка? Ответ обоснуйте.
13. Какой знак имеет следующий член определителя 4-го порядка $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21}$?
14. При каких преобразованиях знак определителя меняется на противоположный?
15. Для каких матриц существует обратная матрица?
16. Для каких систем линейных уравнений применимо правило Крамера?
17. Какие преобразования над строками матрицы называются элементарными?
18. Какая система элементов линейного пространства называется линейно зависимой?
19. При каких условиях система из двух элементов является линейно независимой?
20. Что называется базисом системы элементов линейного пространства?
21. Что такое окаймляющий минор для минора M_k ?
22. В чём различие главных и свободных переменных в общем решении системы линейных уравнений?

3-й семестр

1. Что называется многочленом 4-й степени от одной переменной?
2. Какую степень имеет многочлен $0 \cdot x^4 + 2x^2 - 1$?

- Какие задачи можно решать с использованием схемы Горнера?
- Какие многочлены называются ассоциированными?
- Являются ли многочлены $x^3 - 1$ и $x^2 - 1$ взаимно простыми? Ответ обоснуйте.
- Имеет ли многочлен $x^4 + x^3 - x$ рациональные корни? Ответ обоснуйте.
- Какое поле называется алгебраически замкнутым?
- Какое расширение поля называется трансцендентным?
- В чём заключается признак неприводимости Эйзенштейна?
- Как построить ряд Штурма для данного многочлена?

4-й семестр

- Какая алгебраическая система называется группой, кольцом, полем?
- Какие аксиомы составляют аксиоматику Пеано?
- Сформулируйте определение архимедова порядка.
- Как строится модель \mathbf{Z} ?
- Является ли система $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$ полем? областью целостности?
- Как вводится отношение порядка в кольце целых чисел?
- Как строится модель \mathbf{Q} ?
- Перечислите свойства рациональных чисел.
- Какими свойствами обладают фундаментальные последовательности произвольного линейно строго упорядоченного поля?
- Какие вы знаете модели теории \mathbf{C} ?

8.4. Примеры тестов

1-й семестр

1.	Пусть заданы множества A и B . Элементами какого множества являются общие элементы множеств A и B ?		
	объединения $A \cup B$	пересечения $A \cap B$	разности $A \setminus B$
2.	Пусть во множестве A n элементов. Сколько элементов в булеане 2^A множества A ?		
	$n!$	n^2	2^n
3.	Пусть заданы множества $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{a, b\}$. Какое из следующих множеств является декартовым произведением $B \times A$?		
	$\{1, 2, 4, a, b\}$	$\{a, 2a, 4a, b, 2b, 4b\}$	$\{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 4)\}$
4.	Пусть на множестве $A = \{1, 2, 5\}$ задано бинарное отношение $\beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 5), (5, 1)\}$. Какое из следующих бинарных отношений является дополнением $\bar{\beta}$ бинарного отношения β ?		
	$\{(1, 5), (2, 1), (2, 2), (5, 2), (5, 5)\}$	$\{(1, 5), (2, 1), (5, 2)\}$	$\{(1, 1), (2, 1), (5, 2), (1, 5)\}$
5.	Какое из следующих бинарных отношений, заданных на множестве $B = \{b, c, d, f\}$ является отношением эквивалентности?		
	$\{(b, b), (c, c), (d, d), (f, f)\}$	$\{(b, b), (c, c), (d, d), (f, f), (b, c)\}$	$\{(b, c), (c, b), (d, f), (d, f)\}$
6.	Какое из следующих бинарных отношений, заданных на множестве $C = \{a, b, c\}$ является отношением нестрогого линейного порядка на C ?		
	$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c)\}$	$\{(a, a), (b, c), (a, c)\}$	$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$
7.	Какое из следующих отображений является биективным?		
	$f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}; f(n) = 2n - 1$	$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}; f(z) = 2z - 1$	$f: \mathbf{N} \rightarrow K, K - \text{множество нечётных натуральных чисел}; f(n) = 2n - 1$

8.	Какая из формул верна?		
	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 4ab^3 + b^4$	$(a+b)^4 = a^4 + 5a^2b + 10a^2b^2 + 5ab^2 + b^4$
9.	Число всех сочетаний из n элементов по k элементов равно ...		
	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{k!}{(n-k)!}$
10.	Какие из следующих пар множеств равномошны?		
	N и R	N и Q	Q и R
11.	В каком случае правильно проведено деление с остатком числа 5 на число -17 ?		
	$5 = -17 \cdot 0 + 5$	$5 = -17 \cdot 1 + 22$	$5 = -17 \cdot (-1) - 12$
12.	Какие из чисел 4, 9, 12 являются взаимно простыми?		
	4 и 9	9 и 12	таких чисел нет
13.	Какое из следующих разложений является каноническим разложением числа 360?		
	$6^2 \cdot 10$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
14.	Выберите целочисленное решение диофантова уравнения $12x - 27y = -25$.		
	$\left(\frac{1}{6}; 1\right)$	$x = \frac{27y - 25}{12}$	решений нет
15.	Выберите приведённую систему вычетов по модулю 8.		
	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	{1, 3, 5, 7}	{2, 4, 6, 8}
16.	Чему равно значение функции Эйлера $\varphi(720)$?		
	192	360	3

2-й семестр

1.	Выберите число, которое является симметричным элементом для (-2) в $\langle \mathbf{Q}^*, \cdot \rangle$.		
	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2.	Чему равно произведение $\tau_1 \tau_2$ подстановок $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?		
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
3.	Какое из следующих подмножеств является подкольцом кольца $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$?		
	Множество чётных чисел	Множество нечётных чисел	Натуральные числа
4.	Чему равна действительная часть комплексного числа $(2 + 4i)^2 - 5i$?		
	-12	4	20
5.	Чему равен модуль числа $-3 - 4i$?		
	5	25	-7
6.	Какие из следующих матриц можно складывать:		
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$		
	A и B	A и C^T	B^T и C
7.	Какая из следующих матриц является единичной?		
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8.	Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Какое из произведений матриц имеет смысл?		

	AB	BA	AC
9.	Какие из следующих матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются делителями нуля?		
	A и B	A и C	B и C
10.	Какое из следующих произведений не является членом определителя 5-го порядка?		
	$a_{21}a_{12}a_{34}a_{43}a_{55}$	$a_{21}a_{12}a_{34}a_{41}a_{55}$	$a_{41}a_{12}a_{34}a_{23}a_{55}$
11.	Каков знак данного члена определителя $a_{21}a_{12}a_{55}a_{34}a_{43}$ пятого порядка?		
	положительный	отрицательный	Данное произведение не является членом определителя.
12.	Установите соответствие между определителями и их значениями.		
	1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.		
	$\square 0$; $\square 6$; $\square -6$; $\square 12$; $\square -12$.		
13.	Какая матрица является обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$?		
	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$
14.	Дана система линейных уравнений: $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$ Тогда матричная форма записи этой системы имеет вид...		
	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
15.	Для какой из следующих систем применимо правило Крамера?		
	$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$
16.	Какие из следующих алгебраических систем являются линейными пространствами: 1. $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot, \mathbf{Q} \rangle$; 2. $\langle \mathbf{Q}, +, \cdot, \mathbf{R} \rangle$; 3. $\langle \mathbf{R}, +, \cdot, \mathbf{Q} \rangle$?		
	1.	2.	3.
17.	Какая система является базисом линейного пространства $\langle \mathbf{R}^2, +, \cdot, \mathbf{R} \rangle$?		
	$\{(1, 2), (0, 0)\}$	$\{(1, 2), (-3, -6)\}$	$\{(1, 2), (2, 3)\}$
18.	Чему равен ранг данной системы векторов $\{(1, 0, 2), (0, 0, 0), (5, 0, 10), (1, 2, 3)\}$?		
	1	2	3
19.	Какое из подмножеств является линейным подпространством пространства $\langle \mathbf{R}, +, \cdot, \mathbf{Q} \rangle$?		
	\mathbf{Z}	\mathbf{Q}	\mathbf{R}^+
20.	Какой минор является окаймляющим для минора $M_{(1,3),(1,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ в матрице		

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} ?$		
	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
21.	Какая из матриц является матрицей ступенчатого вида?		
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
22.	Какие переменные будут свободными в данной системе линейных уравнений		
	$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ y + z + t = 0 \end{cases} ?$		
	x и y	z и t	y, z и t

3-й семестр

1.	Выберите многочлен, являющийся разностью многочленов: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$ и $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.		
	$-6x^2 - 4x - 4$	$6x^2 - 4x - 4$	$3x^2 - 4x - 4$
2.	Какие из многочленов $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $h(x) = -3x^2 + 6x - 3$ являются ассоциированными?		
	$f(x)$ и $g(x)$	$f(x)$ и $h(x)$	$g(x)$ и $h(x)$
3.	Какую степень имеет многочлен $0 \cdot x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 5$?		
	пятую	четвёртую	третью
4.	В каком случае правильно проведено деление многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ на многочлен $g(x) = x^2 - 2x + 2$ с остатком?		
	$f(x) = g(x) \cdot x - x$	$f(x) = g(x) \cdot (x - 1) + x$	$f(x) = g(x) \cdot x - 1$
5.	Какой многочлен является НОДом многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$?		
	$x - 2$	$5x^2 + 25$	$x^2 + 5$
6.	Какое разложение многочлена $f(x) = x^4 + 1$ является каноническим над полем \mathbf{R} ?		
	$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$	$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$	такого разложения нет
7.	Какое разложение многочлена $f(x) = x^4 + 1$ является каноническим над полем \mathbf{C} ?		
	$(x^2 - i)(x^2 + i)$	$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$	$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
8.	Какие из многочленов $f(x) = x^2 - \bar{2}x + \bar{1}$, $g(x) = x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{2}x$, $h(x) = -\bar{2}x^2 + \bar{1}x - \bar{1}$ разложимы в \mathbf{Z}_3 ?		
	$f(x)$ и $g(x)$	$f(x)$ и $h(x)$	$g(x)$ и $h(x)$
9.	Какие из следующих полей являются алгебраическими расширениями поля \mathbf{Q} ?		
	$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$	$\mathbf{Q}(i)$	$\mathbf{Q}(\pi)$
10.	Какая последовательность многочленов является рядом Штурма для многочлена $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$?		
	$f_0(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; $f_1(x) = 4x^3 - 4x$; $f_2(x) = x^2 - 2$;	$f_0(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; $f_1(x) = x^3 - 2x$; $f_2(x) = x^2 - 2$;	$f_0(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; $f_1(x) = 4x^3 - 4x$;

$f_3(x) = -x; f_4(x) = 1.$	$f_3(x) = x.$	$f_2(x) = 3x^2 - x;$ $f_3(x) = 6x - 1; f_4(x) = 6.$
----------------------------	---------------	--

4-й семестр

1.	Какие из следующих алгебраических систем являются полями: 1. $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$; 2. $\langle \mathbf{Q}, +, \cdot \rangle$; 3. $\langle \mathbf{R}^+, +, \cdot \rangle$?		
	1.	2.	3.
2.	Операция «вычитание» не является на множестве натуральных чисел		
	однозначной	выполнимой	замкнутой
3.	В какой системе счисления верно равенство: $23 \cdot 4 = 202$?		
	В четверичной	В пятиричной	В семеричной
4.	Назовите наибольшее целое отрицательное число.		
	0	-1	Такого числа не существует
5.	Какая периодическая дробь равна $1/3$?		
	1,3	0,3	0,(3)
6.	Какой обыкновенной дроби равно число $0,(7)$?		
	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{9}$
7.	Назовите характеристическое свойство бесконечных десятичных дробей, представляющих рациональные числа.		
	Эти дроби – периодические	Эти дроби – непериодические	У этих дробей нет характеристического свойства
8.	Выберите из числовых множеств $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ всюду плотное множество.		
	\mathbf{N}	\mathbf{Z}	\mathbf{Q}
9.	Найдите комплексное число, симметричное числу $1 + i$ относительно умножения.		
	$1 - i$	$-1 - i$	$0,5 - 0,5i$
10.	Модуль комплексного числа $z = (a; b)$ находится по формуле		
	$z = a^2 + b^2$	$z = \sqrt{a^2 + b^2}$	$z = a + b $

8.5. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (к экзамену, зачёту):

Перечень вопросов к зачёту (1-й семестр)

- Способы задания множества. Достоинства и недостатки каждого способа. Примеры различных множеств. Подмножество. Пустое и универсальное множество. Теорема о пустом множестве, как подмножестве. Булеан множества. Равенство множеств. Теорема о количестве элементов в булеане конечного множества.
- Операции над множествами. Примеры. Свойства операций.
- Доказательство закона дистрибутивности операции объединения относительно операции пересечения. Доказательство законов де-Моргана.
- Декартово произведение множеств A и B , декартов квадрат множества A . Лемма о количестве элементов в декартовом произведении множеств A и B . Привести примеры, изобразить на координатной плоскости. Случай, когда декартово произведение пусто. Операции над декартовыми произведениями.
- Бинарные отношения. Примеры. Равенство бинарных отношений. Операции над бинарными отношениями: теоретико-множественные, инверсия и произведение.
- Свойства операции произведения бинарных отношений. Докажите ассоциативность операции произведения бинарных отношений. Докажите: $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

7. Свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Примеры. Критерий рефлексивности б.о. Критерий симметричности б.о. Критерий транзитивности б.о.
8. Эквивалентность и разбиение. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Примеры. Теорема о разбиении множества A по эквивалентности, заданной на A .
9. Отображение. Образ и прообраз. Примеры. Равные отображения. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры. Произведение отображений. Примеры, обозначения. Свойства операции произведения. Теорема о произведении инъективных и сюръективных отображений.
10. Тождественное отображение. Лемма об умножении тождественного отображения на отображение $f: X \rightarrow Y$ (слева и справа).
11. Обратное отображение. Примеры. Критерий обратимости отображения.
12. Перестановки, сочетания, размещения. Различие этих понятий. Формулы для их вычислений (с доказательством).
13. Свойства сочетаний (с доказательством). Бином Ньютона.
14. Равномощные множества. Примеры. Лемма об отношении равномощности.
15. Конечные и бесконечные множества. Основная теорема о конечных множествах. Счётные множества. Множества мощности континуума.
16. Теорема Кантора. Континуум-гипотеза.
17. Определение делимости и простейшие свойства этого отношения.
18. Деление с остатком. Теорема о делении с остатком.
19. Наибольший общий делитель и его свойства (с доказательством).
20. Алгоритм Евклида.
21. Взаимно простые числа и их свойства (с доказательством).
22. Простые числа и их свойства (с доказательством). Теорема Евклида.
23. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение целых чисел.
24. Наименьшее общее кратное и его свойства (с доказательством).
25. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
26. Отношение сравнения целых чисел. Критерий сравнения целых чисел. Отношение сравнения как отношение эквивалентности.
27. Свойства сравнений (с доказательством).
28. Признаки делимости. Обобщённый признак делимости Паскаля.
29. Классы вычетов по модулю m . Операции на множестве классов вычетов.
30. Полная и приведённая системы вычетов.
31. Функция Эйлера. Определение и вывод формулы.
32. Теоремы Эйлера и Ферма.

Перечень вопросов к экзамену (2-й семестр)

1. Бинарная алгебраическая операция и её свойства.
2. Нейтральный и симметричный элементы относительно операции. Теоремы об единственности нейтрального и симметричного элементов.
3. Группа, определение, примеры, терминология. Порядок группы, порядок элемента группы.
4. Группа подстановок. Геометрическая интерпретация группы S_3 .
5. Изоморфизм алгебраических систем. Теорема об изоморфизме.
6. Подгруппа. Критерий подгруппы.
7. Теорема о пересечении подгрупп.
8. Лемма об обратном элементе к произведению $(ab)^{-1}$.
9. Циклическая группа. Теорема о степенях.
10. Циклическая подгруппа произвольной группы, образующий элемент.
11. Разложение группы по подгруппе. Леммы о смежных классах. Индекс подгруппы в группе.

12. Теорема Лагранжа.
13. Нормальный делитель. Теорема о гомоморфизме.
14. Кольцо, определение, примеры, терминология. Делители нуля, примеры. Теорема о свойствах кольца.
15. Пример кольца на булеане универсального множества.
16. Подкольцо, определение, примеры. Критерий подкольца.
17. Поле, определение, примеры, терминология. Характеристика поля. Теорема о свойствах поля.
18. Подполе. Критерий подполя.
19. Построение поля комплексных чисел.
20. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи.
21. Циклическая мультипликативная группа степеней числа i .
22. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме.
23. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.
24. Формула Муавра-Лапласа.
25. Теорема об извлечении корней n -ой степени из комплексного числа z .
26. Мультипликативная группа корней n -ой степени из 1.
27. Классификация систем линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
28. Матрицы. Операции над ними и их свойства.
29. Кольцо квадратных матриц.
30. Определитель n -го порядка.
31. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков. Геометрическая интерпретация определителя второго и третьего порядков.
32. Свойства определителей. Разложение определителя по строке (столбцу).
33. Миноры и алгебраические дополнения.
34. Обратная матрица. Критерий существования обратной матрицы.
35. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований над строками.
36. Решение матричных уравнений.
37. Теорема Крамера. Замечание об однородных системах.
38. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.
39. Арифметическое векторное пространство, определение и примеры.
40. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы.
41. Частные случаи линейной зависимости (для систем, состоящих из одного и двух векторов).
42. Критерий линейной зависимости.
43. Базис системы векторов. Теорема о базисе.
44. Теорема о двух системах и следствия из неё. Теорема о количестве векторов в различных базисах одной системы векторов. Ранг системы векторов.
45. Ранг матрицы. Минорный ранг матрицы. Алгоритм вычисления ранга матрицы.
46. Критерий совместности системы линейных уравнений.
47. Исследование систем линейных уравнений методом Гаусса. Обоснование.
48. Исследование систем линейных уравнений методом Крамера. Обоснование.

Перечень вопросов к экзамену (3-й семестр)

1. Построение кольца многочленов от одной переменной. Старший член и степень многочлена.
2. Схема Горнера и теорема Безу.
3. Теорема о числе корней многочлена в коммутативной области целостности.

4. Теорема о разложении многочлена в алгебраически замкнутом поле.
5. Делимость в кольце многочленов.
6. Ассоциированные многочлены. Неразложимые многочлены.
7. Деление с остатком.
8. НОД многочленов.
9. Свойства взаимно простых многочленов.
10. Неприводимые многочлены.
11. Каноническое разложение над полем \mathbf{R} .
12. Каноническое разложение над полем \mathbf{C} .
13. Многочлены с целыми коэффициентами.
14. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.
15. Редукция многочленов с целыми коэффициентами по числовому модулю.
16. Задача о приводимости многочлена над полем \mathbf{Q} .
17. Редукционный признак неприводимости многочлена.
18. Признак неприводимости Эйзенштейна.
19. Кольцо вычетов по многочлену.
20. Сравнения в факториальном кольце многочленов.
21. Простое расширение поля.
22. Алгебраическое расширение поля.
23. Трансцендентное расширение поля.
24. Распределение вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами.
25. Ряд Штурма.
26. Теорема Штурма.

Перечень вопросов к экзамену (4-й семестр)

1. Теорема о свойствах сюръективного гомоморфизма.
2. Критерий упорядочивания колец, полей.
3. Аксиоматика Пеано. Обоснование метода математической индукции.
4. Построение полукольца на множестве \mathbf{N} .
5. Введение и свойства порядка на \mathbf{N} .
6. Теоретико-множественная модель \mathbf{N} .
7. Свойства аксиоматики Пеано.
8. Определение системы \mathbf{Z} . Докажите, что $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$ – область целостности.
9. Упорядочивание кольца целых чисел.
10. Модель теории \mathbf{Z} .
11. Аксиоматическая теория \mathbf{Q} . Свойства рациональных чисел.
12. Упорядочивание поля \mathbf{Q} .
13. Непротиворечивость теории \mathbf{Q} .
14. Существование в \mathbf{Q} последовательности вложенных отрезков с пустым пересечением.
Определение \mathbf{R}_B .
15. Свойства фундаментальных последовательностей произвольного линейно строго упорядоченного поля.
16. Модель Вейерштрасса теории \mathbf{R} (обзор).
17. Различные классификации действительных чисел (рациональные, иррациональные; алгебраические, трансцендентные). Мощности соответствующих подмножеств.
18. Аксиоматическая теория \mathbf{C} (обзор).

8.6. Темы для написания курсовой работы

Не предусмотрено.

8.7. Формы контроля самостоятельной работы

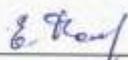
Студенты сдают самостоятельную работу на консультациях.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена:
К.ф.-м.н., доцент кафедры математики,
теории и методики обучения математике  /А. И. Забарина/

К.ф.-м.н., доцент кафедры математики,
теории и методики обучения математике  /Е. А. Фомина/

Рабочая программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры математики,
теории и методики обучения математике, протокол № 1 от «31» августа 2015 года.

Зав. кафедрой  /Е.А. Фомина/

Рабочая программа учебной дисциплины одобрена методической комиссией физико-
математического факультета
протокол № 1 от «31» августа 2015 г.

Председатель методической комиссии ФМФ  З. А. Скрипко