

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**(ТГПУ)**

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

---

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2014 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б.3.В.30 ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Трудоемкость (в зачетных единицах): 2

Направление подготовки: *050100.62 «Педагогическое образование»*

Профили подготовки: *Математика и экономика*

Степень (квалификация) выпускника: *бакалавр*

### **1. Цели изучения дисциплины.**

Целью курса вариационное исчисление является изучение понятия функционала и методов исследования проблемы нахождения экстремумов функционалов, также отвечающих им методов решения прикладных задач.

В задачи курса вариационного исчисления входят: дальнейшее развитие основных понятий математического анализа, логического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач на экстремум функционалов, применение методов вариационного исчисления в современной теоретической физикою.

### **2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы.**

Программа дисциплины «Вариационное исчисление» составлена в соответствии с учебным планом и Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 «Педагогическое образование», профили подготовки: «математика и физика», «математика и экономика».

Вариационное исчисление относится к вариативной части дисциплин математического и естественнонаучного цикла. Для изучения курса вариационного исчисления необходимо твердое знание студентами базового курса математического анализа высшей школы и курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Вариационное исчисление является одним из важных курсов, формирующих математическое образование студентов физико-математического факультета. Методы вариационного исчисления лежат в основе многих и математических дисциплин, изучаемых на физико-математическом факультет. Данная дисциплина призвана дать студентам математический аппарат, который будет использоваться в дальнейшем при изучении дисциплин базового цикла, а также при изучении дисциплин профессионального цикла, в учебно-исследовательской и научно-исследовательской работе.

### **3. Требования к уровню освоения программы.**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1); способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4); способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК-6); готовность к взаимодействию с коллегами, к работе в коллективе (ОК-7); владение основами речевой профессиональной культуры (ОПК-3);  
В результате изучения дисциплины студент должен:

*Знать:* основные понятия и методы вариационного исчисления, использующихся при изучении общетеоретических и специальных дисциплин.

*Уметь:* применять математические методы для решения практических задач, использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и

систематизации информации по теме исследования и пользоваться при необходимости математической литературой.

*Владеть:* методами решения задач вариационного исчисления, основами математического моделирования прикладных задач, решаемых аналитическими методами.

#### 4. Общая трудоемкость дисциплины 2 зачетные единицы и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Трудоемкость (в соответствии с учебным планом) (час)	Распределение по семестрам (в соответствии с учебным планом) (час)		
		6 семестр	7 семестр	8 семестр
	72			
Аудиторные занятия	34	34		
Лекция	0	0		
Практические занятия (ПЗ)	34	34		
Семинары (С)				
Лабораторные работы (ЛР)				
Другие виды аудиторных работ				
Другие виды работ				
Самостоятельная работа (СР)	38	38		
Курсовой проект (работы)				
Рефераты				
Расчетно-графические работы				
Формы текущего контроля				
Формы промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом	6	Зачет 6		

#### 5. Содержание программы учебной дисциплины.

##### 5.1. Содержание учебной дисциплины

##### 6 семестр

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Аудиторные часы					Самостоятельная работа
		Всего	Лекции	Практические (семинары)	Лабораторные	В т.ч. интерактивные формы обучения (не менее 20%)	
1.	Классические задачи вариационного исчисления.	8		8			6
2.	Необходимое условие экстремума	4		4		2	6

	функционала.						
3.	Решение задачи о брахистохроне.	4				2	4
4.	Решение изопериметрической задачи.	4		4			4
5.	Постановка и решение простейших задач о геодезических линиях.	4		4			2
6.	Вариационные задачи с подвижными границами.	4		4			6
7.	Методы вариационного исчисления в физике.	6		6		4	10
	Итого:	34/2 зач.ед.	76	34		8/23,4%	38

### 5.2. Содержание разделов дисциплины.

1. *Классические задачи вариационного исчисления:* Формулировка задачи о линии наибыстрейшего спуска. Изопериметрическая задача. Постановка задачи о геодезических линиях. Понятие функционала. Простейшие примеры функционала, встречающихся в курсе математического анализа. Линейный функционал. Вариация функционала и теорема о вычислении вариации функционала методами математического анализа.
2. *Необходимое условие экстремума функционала:* Экстремум функционала. Теорема о необходимом условии экстремума функционала. Уравнение Эйлера и его связь с дифференциальными уравнениями. Простейшие типы уравнения Эйлера и их интегрирование.
3. *Решение задачи о брахистохроне:* Построение функционала для нахождения линии наибыстрейшего спуска – брахистохроны. Уравнение Эйлера в задаче о брахистохроне. Первый интеграл для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в задаче о брахистохроне. Полное интегрирование уравнения Эйлера. Циклоида как решение вариационной задачи о брахистохроне.
4. *Решение изопериметрической задачи:* Условный экстремум функционалов. Сведение вариационной задачи на условный экстремум к вариационной задаче на безусловный экстремум. Построение функционала для изопериметрической задачи. Интегрирование уравнения Эйлера для изопериметрической задачи. Анализ решения.
5. *Постановка и решение простейших задач о геодезических линиях:* Геодезические линии на поверхностях в трехмерном пространстве. Геодезические линии на пространстве Минковского. Вывод необходимых уравнений для условного экстремума функционалов. Интегрирование уравнений условного экстремума функционалов для простейших случаев поверхностей.
6. *Вариационные задачи с подвижными границами:* Простейшая вариационная задача с подвижными границами. Постановка вариационной задачи с подвижными границами для функционалов представимых интегралами от функций многих переменных, аргументы которых зависят от функций и их

первый производных. Применение вариационных задач с подвижными границами в классической механике.

7. *Методы вариационного исчисления в физике*: Вывод уравнений классической механики с помощью вариационного принципа. Теорема Нетер и законы сохранения в классической механике. Уравнения Максвелла в классической электродинамике в вариационной формулировке. Закон сохранения электрического заряда.

### 5.3. Лабораторный практикум.

Не предусмотрен.

## 6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

### 6.1. Основная литература по дисциплине:

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/Л.Э. Эльсгольц. – Издательство ЛКИ – 2008.
2. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления /Н.М. Гюнтер. – 2-е изд, стер.-СПБ.: Лань – 2009.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 частях/Г.М. Фихтенгольц. – С-Пб.: Лань, 2006. – Ч. 1.-2002.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 частях/Г.М. Фихтенгольц. – С-Пб.: Лань, 2006. – Ч. 2.-2002.

### 6.2. Дополнительная литература:

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Вариационное исчисление, линейное программирование, вычислительная математика, теория сплайнов/М.Л. Краснов-Т.б. – СПб.: Лань – 2013.
2. Моклячук М.П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи/М.П. Моклячук – Издательство: Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований -2006.
3. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах: учеб. Пособие / А.Б. Васильева – 3-е изд., испр. – СПб.: Лань,-2010.
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 тт./Г.М. Фихтенгольц.-М.: Физматлит. т 3.-2008.

### 6.3 Средства обеспечения освоения дисциплины.

При изучении дисциплины полезно посетить следующие Интернет-ресурсы:

<http://libserv.tspu.edu.ru/> - Научная библиотека Томского государственного педагогического университета.

<http://www.gpntb.ru> – Государственная публичная научно-техническая библиотека России.

<http://elibrary.ru> – Научная электронная библиотека.

<http://www.lib.msu.su> – Научная библиотека Московского государственного университета.

<http://www.lib.berkeley.edu/> - список библиотек мира в Сети.

<http://ipl.sils.umich.edu> – публичная библиотека Интернет.

<http://www.riis.ru> – Международная образовательная ассоциация. Задачи – содействие развитию образования в различных областях.

<http://www.knigafund.ru> – Электронно-библиотечная система "КнигаФонд"

Кроме этого в освоении дисциплины студентам помогут:

- библиотечный фонд библиотеки ТГПУ
- рабочая программа по дисциплине
- учебные тексты, предлагаемые студентам в ходе занятия
- научные статьи
- Федеральный государственный образовательный стандарт
- учебный план
- учебно-методический комплекс дисциплины.

#### 6.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины.

№ п/п	Наименование раздела (темы) учебной дисциплины	Наименование материалов обучения, пакетов программного обучения	Наименование технических и аудиовизуальных средств, используемых с целью демонстрации материалов
1	Классические задачи вариационного исчисления.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок  интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.
2	Необходимое условие экстремума функционала.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок  интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.
3	Решение задачи о	Проблемные лекции, презентации, решение	Компьютер, проектор, интерактивная

	брахистохроне.	задач, коллоквиум, тестирование.	доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок интернет-ресурсы.
4	Решение изопериметрической задачи.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.
5	Постановка и решение простейших задач о геодезических линиях.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.
6	Вариационные задачи с подвижными границами.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для для интерактивных досок интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.
7	Методы вариационного исчисления в физике.	Проблемные лекции, презентации, решение задач, коллоквиум, тестирование.	Компьютер, проектор, интерактивная доска, программное обеспечение SMART Notebook для интерактивных досок интернет-ресурсы, сетевые ресурсы.

## **7. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.**

### *7.1 Методические рекомендации преподавателю:*

1. Изучив глубоко содержание учебной дисциплины, целесообразно разработать матрицу наиболее предпочтительных методов обучения и форм самостоятельной работы студентов, адекватных видам лекционных и практических занятий.

2. Необходимо предусмотреть развитие форм самостоятельной работы, выводя студентов к завершению изучения учебной дисциплины на её высший уровень.

3. В начале семестра желательно обсудить со студентами форму самостоятельной работы можно выдавать в начале семестра, определив предельные сроки их выполнения и сдачи. Задания для самостоятельной работы желательно составлять из обязательной и факультативной частей.

4. Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

5. Внедрение интерактивных форм обучения – одно из важнейших направлений совершенствования подготовки студентов в современном вузе. Учебный процесс, опирающийся на использование интерактивных методов обучения, организуется с учетом включенности в процесс познания всех студентов группы без исключения. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Организуются индивидуальная, парная и групповая работа, используется проектная работа, осуществляется работа с различными источниками информации. Интерактивные методы основаны на принципах взаимодействия, активности обучаемых, опоре на групповой опыт, обязательной обратной связи. Создается среда образовательного общения, которая характеризуется открытостью, взаимодействием участников, равенством их аргументов, накоплением совместного знания, возможностью взаимной оценки о контроля. Виды таких занятий могут быть разнообразны: обсуждение студентами проектов курсовых работ, рефератов, разбор нестандартных задач, проектно-исследовательская деятельность с защитой работ и т.д. В рамках данного курса возможны подготовленные встречи с ведущими преподавателя ТГПУ и других университетов. А также встречи с ведущими учеными с обсуждением актуальных вопросов современной математики, решением нестандартных задач.

При проведении аттестации студентов важно всегда помнить, что систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. Знание критериев оценки знаний обязательно для преподавателя и студента.

## *7.2 .Методические рекомендации для студентов:*

Студентам предлагается использовать указанную литературу и методические рекомендации, разработанные сотрудниками кафедры математического анализа ТГПУ для более прочного усвоения учебного материала, изложенного на лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы. Студентам необходимо выполнить индивидуальные задания по основным темам курса. Задания, вынесенные на самостоятельную работу, проверяются в течение семестра. Оценки за индивидуальные задания и самостоятельную работу учитываются при выставлении оценок на экзаменах.

Целью самостоятельной работы, то есть работы, выполняемой студентами во внеаудиторное время по заданию и руководству преподавателя является глубокое понимание и усвоение курса лекций и практических занятий, подготовка к выполнению контрольных работ, к выполнению семестрового задания, к сдаче экзамена, овладение

профессиональными умениями и навыками деятельности, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Для успешной подготовки и сдачи экзамена необходимо проделать следующую работу:

1. Изучить теоретический материал, относящийся к каждому из разделов.
2. Выработать устойчивые навыки в решении типовых практических заданий.
3. Выполнить контрольные работы, проводимые в течение семестра.

## **8. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.**

### *8.1. Тематика рефератов:*

- 8.1. Функционалы в курсе математического анализа.
- 8.2. Функционалы с производными высших порядков.
- 8.3. Функционалы от нескольких искомых функций.
- 8.4. Классические вариационные задачи.
- 8.5. Односторонние вариации.
- 8.6. Достаточные условия экстремума функционала.
- 8.7. Теория Гамильтона-Якоби. Вариационные принципы механики.
- 8.8. Условный экстремум функционала.

### *8.2. Вопросы и задания для самостоятельной работы:*

#### 6 семестр

1. Функциональные и метрические пространства.
2. Первая и вторая теоремы Нетер.
3. Определенный интеграл как линейный функционал на метрическом пространстве  $C$ .
4. Длины спрямляемых кривых на плоскости как пример нелинейного функционала.
5. Вариационный принцип в классической механике.
6. Постановка вариационной задачи для площадей поверхностей вращения.

### *8.3. Вопросы для самопроверки.*

#### **1. Аналогии между нахождением минимума функции и минимума функционала:**

- 1). Для нахождения минимума функционала первая производная от него приравнивается нулю.
- 2). Для нахождения минимума функционала первая вариация приравнивается нулю.
- 3). Для нахождения минимума функционала первая производная от него приравнивается нулю.

#### **2. Необходимо условие минимума функционала:**

- 1). Первая производная функционала  $J$  должна быть равна нулю в точке минимума.
- 2). Первая вариация функционала  $J$  должна быть равна нулю в точке минимума.
- 3). Вторая вариация функционала  $J$  должна быть равна нулю в точке минимума.
- 

#### **4. Задачи, приводящие к минимуму функционала:**

- 1). Задача нахождения площади фигуры.
- 2). Задача о наибольшей площади.
- 3). Задача нахождения длины кривой.

8.4 . Перечень вопросов к зачету:

#### **6 семестр.**

1. Понятие функционала. Примеры функционалов в курсе математического анализа.
2. Формулировка вариационной задачи о брахистохроне.
3. Формулировка изопериметрической задачи.
4. Формулировка задачи о брахистохроне.
5. Линейный функционал. Вариация функционала.
6. Теорема о вычислении вариации функционала.
7. Основная лемма вариационного исчисления.
8. Понятие экстремума функционала.
9. Необходимое условие экстремума функционала.
10. Экстремум функционала с закрепленными границами.
11. Уравнение Эйлера.
12. Решение уравнение Эйлера в простейших случаях.
13. Уравнение Эйлера в задачи о брахистохроне.
14. Интегрирование уравнение Эйлера в задачи о брахистохроне.
15. Циклоида как решение задачи о брахистохроне.
16. Вариационные задачи на условный экстремум
17. Решение изопериметрической задачи.
18. Сведение задачи о геодезических линиях к вариационной задаче на условный экстремум.
19. Решение задачи о геодезических линиях для плоскости и сферы.
20. Вариационная формулировка уравнений Ньютона.
21. Вариационная формулировка уравнения Максвелла.
22. Теорема Нетер в классической теории поля.

#### *8.5. Темы для написания курсовой работы:*

1. Вариационная формулировка уравнений классической механики.
2. Вариационная формулировка уравнений электромагнитного поля.
3. Теория скалярного и векторного полей в рамках вариационного принципа.
4. Вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа.

#### *8.6. Формы контроля самостоятельной работы.*

Индивидуальные домашние задания, индивидуальные консультации по изучаемым темам, защита рефератов и курсовых работ, выступления на студенческих конференциях, включение вопросов для самостоятельного изучения в экзаменационные вопросы.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 «Педагогическое образование».

Рабочую программу учебной дисциплины составил:  
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа \_\_\_\_\_/А.В. Тимошкин/

Рабочая программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа,  
протокол №1 от "29" августа 2014 г.

Заведующий кафедрой математического анализа \_\_\_\_\_/П.М. Лавров/

Рабочая программа учебной дисциплины одобрена методической комиссией физико-математического факультета  
протокол №1 от "29" августа 2014 г.

Председатель методической комиссии \_\_\_\_\_/З.А. Скрипко/